Françoise Duquesne
Cnefei
58, 60 av des Landes
92150 Suresnes

références: Les dyscalculies de l'enfant IMC : de la maternelle au collège, *La nouvelle revue de l'AIS,* 3e trimestre 2004, n°27*,* pp. 103- 113.

Les dyscalculies de l'enfant IMC : de la maternelle au collège.

Résumé : Pour comprendre le monde il est incontournable de comprendre le nombre. Au-delà d'une simple maîtrise d'habiletés d'énumération, de dénombrement ou de calcul, la compréhension du nombre représente dans notre système scolaire la base des apprentissages arithmétiques. Les enjeux des premiers apprentissages numériques sont donc fondamentaux et c'est dans la perspective de leur implication dans les apprentissages mathématiques du collège que se situe la présente analyse des difficultés que risquent de rencontrer certains enfants et adolescents IMC.

Mots-clés : dyscalculie- Infirmité Motrice Cérébrale- apprentissages numériques- arithmétique-algèbre.

L'enjeu des apprentissages numériques

De façon universelle, dans notre quotidien et donc dans celui des enfants, le nombre sert de jalon et de mesure pour se repérer dans l'espace comme dans le temps. Il marque notre lieu de résidence, il évalue les grandeurs physiques de notre environnement, il date tous les événements de notre vie, il rythme notre histoire. Pour comprendre le monde il est incontournable de comprendre le nombre. Favoriser l'accès de ce levier du monde à tous les enfants représente un enjeu qui nous mobilise en tant que formatrice en didactique des mathématiques.

De plus, au-delà d'une simple maîtrise d'habiletés d'énumération, de dénombrement ou de calcul, la compréhension du nombre représente dans notre système scolaire la base des apprentissages arithmétiques, eux-mêmes constituant le préambule à la compréhension de systèmes mathématiques plus complexes : par exemple, ceux qui mettent en jeu les fractions, les nombres relatifs ou les réels en algèbre.

Ainsi la conception des entiers naturels conditionne la connaissance des autres nombres et en sens inverse, celle-ci implique des réélaborations successives de la première. C'est pourquoi, les enjeux des premiers apprentissages numériques sont fondamentaux et c'est dans la perspective de leur implication dans les apprentissages mathématiques du collège que nous situerons la présente analyse des difficultés que risquent de rencontrer certains enfants et adolescents IMC[1].

Les premiers apprentissages numériques

Dès la maternelle, les savoirs mathématiques apportés au cours de cette première étape de la scolarité peuvent se retrouver condensés dans la formule consacrée "savoir compter". En effet, bien avant que le nombre acquière un statut logique opératoire, les enfants de maternelle manifestent des habiletés numériques comme la connaissance de la comptine, le comptage, le dénombrement et leur utilisation pour résoudre de petits problèmes arithmétiques.

Compter les éléments d'une collection

La comptine, d'abord apprise comme une suite de mots indifférenciés, petit à petit se constitue en une chaîne qui peut être coupée et dont l'égrenage peut être effectué à partir d'un terme autre que le premier. Ensuite, les enfants parviennent à distinguer le sens dans lequel on peut énoncer les éléments, en avançant ou en reculant, puis à repérer que ces termes sont reliés les uns aux autres par l'ajout ou le retrait d'une unité.

L'acte de compter les objets d'une collection est constitué du pointage de ces objets un à un, sans en omettre ni considérer l'un d'eux plus d'une fois, tout en énonçant les mots-nombres de la comptine, eux aussi un à un. Compter revient donc à associer exactement au même moment un objet repéré à l'aide des yeux et/ou du doigt et un mot de la comptine, puis à itérer cette double activité pour chaque objet jusqu'à épuisement de la collection, en conservant le même rythme d'effectuation au niveau du regard, du geste et de la parole. Mais, faire correspondre un élément de la collection à un mot-nombre et à un seul ne suffit pas à attribuer une signification quantitative à ce mot.

Attribuer une signification quantitative aux mots-nombres

Dénombrer requiert une compétence supplémentaire qui consiste à repérer et à comprendre que le dernier mot prononcé dans l'égrenage de la comptine représente la quantité correspondant à l'ensemble des objets : il n'est pas attaché au seul objet sur lequel le pointage s'est arrêté mais à tous ceux parcourus par le regard et/ou le doigt. Il ne s'agit pas seulement d'énoncer ce dernier mot-nombre comme un numéro ou un code mais de savoir que ce mot représente une quantité. Au total, dénombrer une collection, c'est attribuer à un ensemble d'objets une propriété particulière, indépendante des objets eux-mêmes et de leurs autres propriétés (comme leur couleur ou leur usage), abstraction faite de la place qu'ils occupent dans l'espace ainsi que de l'ordre dans lequel s'effectue

[1] Pour plus de précisions concernant les difficultés des enfants I. M. C. on pourra se reporter dans ce même dossier à l'article de J.P. Garel et F. Duquesne : « Enseigner à des élèves présentant une dyspraxie visuo-spatiale : illustrations en mathématiques et en EPS ».

le comptage ; de plus cette quantité est identifiée par un mot pour pouvoir la dire et par un signe pour pouvoir l'écrire.

Enfin, pour conceptualiser le nombre il reste à mettre en relation les diverses quantités, attribuées à diverses collections, auxquelles on a donné divers noms. C'est la mise en ordre de ces quantités, des plus petites aux plus grandes, de telle sorte que l'on passe de l'une à la suivante en ajoutant un objet à la collection précédente, qui permet de construire les propriétés du nombre et les relations qu'ils entretiennent. Ce sont elles qui fondent le calcul.

Par exemple, compter "6" c'est être capable d'attribuer le nombre "6" à une collection, c'est savoir compter les six objets en en comprenant la signification quantitative, c'est désigner la quantité par le mot-nombre "six", écrire et lire le chiffre "6", c'est aussi savoir que c'est plus que 3 mais moins que 8, mais c'est aussi être capable de construire une autre collection de 6 objets, en utilisant d'autres procédures, comme compter 6 en reconnaissant une organisation spatiale des unités, en comptant 3 et encore 3 ou 2 et 2 et 2, que c'est 5 et 1, et bien d'autres procédures encore!

Au final, on notera que le simple " savoir compter " s'avère plus complexe qu'il n'en a l'air!

Organiser l'espace pour réussir à compter

Certains jeunes enfants IMC, plus particulièrement ceux qui présentent une dyspraxie visuo-spatiale, éprouvent plus ou moins de difficultés dans ces activités de comptage. En effet, la perception visuelle des collections, l'estimation de leur taille, l'agencement dans l'espace de leurs objets confèrent d'emblée un aspect spatial au nombre qui risque de faire obstacle à la construction de la notion de quantité chez certains de ces enfants. Ensuite, l'évaluation des quantités par comptage requiert, non seulement l'organisation du regard et du geste, mais aussi un contrôle et la coordination de plusieurs tâches simultanées : autre obstacle bien souvent.

Du fait de ces deux types de difficultés, de jeunes enfants IMC peuvent être amenés à effectuer plusieurs tentatives de comptages infructueuses : par voie de conséquence, que ce soit au travers d'une perception globale non fiable ou suite à des comptages successifs erronés, les résultats de leur appréhension des quantités sont variables ; cette instabilité ne peut que fragiliser leur élaboration de la permanence du nombre et même la détruire si les expériences malheureuses de dénombrement se multiplient.

L'objectif est alors de chercher à faire construire à ces enfants un nombre efficace sans s'appuyer sur le comptage.

Recourir au nombre pour pallier l'absence des objets

Le comptage permet d'évaluer les quantités, de les comparer et de les mettre en relation. Lorsque les collections sont présentes, ces mises en relation s'opèrent directement par une correspondance terme à terme des objets.

Mais si ces collections ne sont pas réunies dans un même lieu ou si, le temps passant, on n'a plus trace des objets ou encore si on a besoin d'anticiper une comparaison entre des collections qui ne sont pas encore là, des représentations de ces objets et leur dénombrement fourniront le moyen d'abolir cet éloignement spatial ou temporel. Les représentations peuvent être plus ou moins élaborées :

Les représentations analogiques représentent la quantité d'objets absents par une quantité équivalente d'objets autres mais plus ou moins "ressemblants"

Les collections-témoins remplacent les objets évoqués par d'autres qui sont indifférenciables les uns des autres. Ces collections-témoins peuvent être plus ou moins "abstraites" : des pions, des jetons, les doigts, les constellations de dés…

Les représentations numériques expriment les quantités par des symboles (des chiffres ou des lettres) organisés en système (numération écrite ou orale)

Les deux premiers types de représentation permettent de reproduire une pluralité d'objets par une autre pluralité, le dénombrement de l'une pouvant être avantageusement remplacé par le dénombrement de l'autre. Dans le dernier cas, la pluralité est représentée par un signe et le dénombrement n'est plus nécessaire dès lors que le système acquiert une cohérence et un sens intrinsèques.

Avec certains enfants IMC, il s'agira donc de favoriser la construction de ce système de numération sans nécessairement transiter par l'élaboration de représentations spatiales ou expérimentales des quantités. Il faut noter que ce cheminement nécessite certaines capacités d'abstraction. En effet, s'appuyer sur l'expression des quantités, verbale ou en écritures numériques, ne permet pas de faire l'économie de la compréhension que ces systèmes verbaux ne sont pas de simples codes mais renvoient à des quantités.

Par exemple, derrière le mot "dizaine", il faut comprendre un regroupement par dix, c'est-à-dire l'économie procurée par l'action de compter une grande collection à l'aide de "paquets" de dix plutôt que de un en un.

La conceptualisation du système de numération nécessite ainsi d'adopter un double point de "vue" (au sens de vision mentale) : une dizaine n'est plus "vue" uniquement comme *dix* unités discrètes mais comme *une* plus grande unité de comptage : les *dix* deviennent *un*. Il s'agit donc, suivant les situations, d'utiliser l'une ou l'autre de ces représentations de la quantité dix.

Les calculs arithmétiques : un moyen de mettre en relation des quantités sans comptage

Sans calcul le nombre ne serait pas le nombre. Ce qui différencie la suite des mots-nombres de notre alphabet c'est justement la possibilité de faire du calcul : ce n'est pas uniquement une suite ordonnée de signes ; ces signes représentent une quantité.

Nous avons vu qu'il est possible de mettre en relation les quantités avec le comptage (éléments présents ou représentés) mais le calcul permet cette action directement à partir des représentations numériques. Là encore, une fois comprise la logique interne du système numérique, c'est-à-dire celle des règles de calcul, il n'est plus nécessaire de recourir aux objets ni au dénombrement. On parle souvent alors de calcul mental ou calcul réfléchi (R. Brissiaud, 2003) car ces règles peuvent être étudiées oralement mais aussi en s'appuyant sur des traces écrites.

Enseigner explicitement les règles du calcul

Par exemple, une règle de calcul élémentaire consiste à savoir qu'ajouter un, c'est prendre le nombre suivant dans la comptine et réciproquement, que tout nombre est composé du précédent auquel on a ajouté un. De même, pour ajouter deux nombres consécutifs, on effectue le double du premier et on ajoute un : 3+4 = 3+3+1 = 6 +1 = 7.

Les enfants IMC ont souvent toutes les capacités requises pour accéder à ces calculs sans avoir besoin de vérification systématique par le comptage d'objets et pour construire ainsi un nombre opérationnel : encore faut-il qu'ils soient convaincus que les règles de calcul ont une raison d'être et qu'ils en comprennent la logique interne.

De plus, au travers de l'apprentissage systématique de ces règles de calcul réfléchi, les élèves IMC sont amenés à prendre conscience qu'un même nombre est représenté numériquement de différentes façons et qu'un même calcul peut être effectué de plusieurs façons.

Par exemple, les égalités précédentes expriment que 7 c'est aussi bien 3+4 que 6 +1 ou que 3+3+1. De même, suivant les règles dont on dispose ou les contextes, le calcul 7+8 peut s'effectuer de plusieurs manières :

7+8 = 7+7+1 = 14+1 = 15 (utilisation de la règle des doubles)

7+8 = 7+3+5 = 10+5 = 15 (utilisation de la règle de décomposition additive de 10 à partir de 7)

7+8 = 5+2+8 = 5+10 = 15 (utilisation de la règle de décomposition additive de 10 à partir de 8)

Il n'est proposé ici qu'un tout petit échantillon des diverses procédures possibles pour effectuer ce calcul. On peut aussi utiliser de nombreuses autres règles faisant intervenir des soustractions (comme ajouter 9 c'est ajouter 10 et retrancher 1) ou des multiplications (comme multiplier un nombre par 10, 100, … c'est lui ajouter un zéro, ou deux ou plus).

Pour les enfants IMC, un enseignement explicite de ces stratégies de calcul nous semble avantageux ainsi qu'un entraînement très régulier, oral et écrit, pour favoriser la mémorisation des faits numériques nécessaire à l'utilisation de ces calculs dans des problèmes arithmétiques.

Utiliser des stratégies de calcul : un moyen de mémoriser le répertoire additif

L'enseignement du calcul aux enfants IMC tel que nous le concevons, s'appuie sur leur compréhension et leur accès à un comportement stratégique en calcul : savoir décomposer les nombres et les recomposer grâce à leurs propriétés et aux règles de calcul. Cela n'exclut pas la recherche d'une meilleure et nécessaire mémorisation des faits numériques.

D'une part, il nous semble qu'on mémorise mieux ce qu'on a conceptualisé. D'autre part, la mémorisation d'un résultat est améliorée par la possibilité pour l'élève de le contrôler. Or ce contrôle s'opère généralement chez les enfants tout-venant grâce au comptage mais une reconstruction rapide des résultats mettant en œuvre conjointement les différentes représentations numériques et les propriétés arithmétiques des nombres permet aussi cette vérification : ces stratégies sont accessibles à de nombreux élèves IMC.

Les opérations arithmétiques

Une fois comprises les règles de calcul et mémorisé le répertoire des faits numériques, ces compétences sont mises en œuvre dans l'exécution des opérations arithmétiques. Prenons l'exemple du calcul 43+39. Dans la plupart des cas, les élèves IMC et leurs enseignants se trouvent confrontés au problème de la pose de cette opération : traditionnellement et culturellement, à l'école primaire, on agence les nombres en tableau pour faciliter le «glissement » des unités d'une place à l'autre lié à notre numération de position. Or cette disposition, très spatialisée, met en difficulté de nombreux élèves IMC. Les enseignants s'ingénient à trouver des adaptations techniques sophistiquées pour maintenir cette présentation habituelle.

Il me semble que cet attachement à la pose des opérations en colonnes ne mérite pas tant d'efforts. En effet, notre but est que les élèves conceptualisent la dite opération, c'est-à-dire en comprennent ses propriétés, ses liens avec la numération décimale et dans quelles situations l'utiliser. Ces objectifs sont tout à fait accessibles en écrivant les calculs en ligne, au moins pour l'addition !

Reprenons l'exemple de 43+39 : avoir conceptualisé l'addition c'est savoir que 43 (et 39) c'est 40+3 (et 30+9) et c'est aussi savoir que l'on peut remplacer une écriture additive par une autre 40+3+30+9 (puis 40+30+3+9) sans changer le résultat. Ensuite, plusieurs niveaux d'exécution sont possibles. La procédure la plus rapide, lorsque toutes les règles de calcul réfléchi ont été enseignées, consiste à effectuer 40+30 (70) puis 3+9 (12). La conceptualisation du système de numération permet la conversion des 12 unités en «1 dizaine et 2 unités » ce qui donne au final une dizaine supplémentaire soit 7+1(8) dizaines et 2 unités soit 82 unités. Avec un peu d'entraînement ces calculs peuvent être effectués rapidement, mentalement ou avec un support écrit (étiquettes de nombres et de signes mathématiques).

De plus, les algorithmes opératoires standards sont sûrs mais très lents, qu'on soit IMC ou non, alors que le calcul en ligne et l'utilisation des stratégies de décomposition et recomposition peuvent être très rapides. Nous soulignons d'autre part que dans la suite de leur scolarité, en arithmétique comme en algèbre, pour entrer des calculs dans les calculatrices ou les ordinateurs, en grande partie, les élèves doivent apprendre à disposer leurs calculs en ligne et non en colonnes.

Pour les autres opérations, la compréhension des algorithmes permet, bien sûr, d'améliorer leur conceptualisation mais une pratique répétée ne nous semble pas indispensable. Leur maîtrise avec des élèves IMC exige de nombreux exercices, qui « mangent » considérablement le temps d'enseignement, (même avec des supports informatisés) du fait en particulier de la lenteur d'exécution fréquente chez ces élèves.

Dans la vie, quotidienne comme scientifique, l'utilisation des calculatrices diminue considérablement les occasions d'effectuer ces calculs «en posant manuellement» les opérations. Il nous semble donc plus pertinent d'aider ces élèves à se servir intelligemment des nouveaux outils de calcul.

Le calcul raisonné pour s'approprier les propriétés des opérations et enrichir ses procédures de calcul

Par exemple, avant d'introduire les nombres dans une calculatrice, il est fondamental d'habituer les élèves à anticiper le résultat d'un calcul.

Par exemple, quel est «grosso modo » le résultat de 86-23 ? Est-t-il plus proche de 80-20 ou de 90-20 ? Quel nombre donne approximativement 2451×3154 ? Est-il plus grand ou plus petit que 6000 ou que 6 000 000 ? Quel est l'ordre de grandeur du résultat de la division de 512 par 11 ? Le résultat tourne-t-il autour de 5, de 50 ou de 500 ?

On regroupera ces activités sous le terme de calcul raisonné. Les principes qui le régissent méritent d'être explicités et enseignés aux élèves IMC.

Par exemple, une règle courante consiste à remplacer les nombres par d'autres, représentant des quantités à peu près équivalentes mais plus «simples » et à effectuer verbalement le calcul sur ces nombres, en utilisant les règles du calcul réfléchi.

Par exemple pour avoir un ordre de grandeur du nombre 2451×3154, on peut approcher le résultat en remplaçant 2451 par 2000 et 3154 par 3000. Il reste ensuite à effectuer mentalement 2000×3000 ou même 2×3 en y adjoignant six zéros. Ce type de calcul préfigure les stratégies utilisées plus tard en algèbre dans lesquelles on remplace un nombre par un autre.

Avec des élèves IMC, il est très fructueux d'accompagner les séances de calcul raisonné de phases au cours desquelles les différentes règles utilisées sont analysées : les élèves sont alors amenés à les identifier, à prendre conscience de leur diversité, à les comparer et à les choisir en fonction des calculs à effectuer.

Par la suite, la familiarisation des élèves avec ces stratégies pour effectuer des calculs approximatifs permet leur transfert dans les calculs exacts. Le choix de cette démarche incite les élèves à abandonner une technique (l'algorithme classique) au profit de procédures mettant en jeu les aspects conceptuels des calculs numériques : les décompositions et recompositions addtives ou multiplicatives des nombres et les propriétés de ces opérations (commutativité, associativité, distributivité…).

Le calcul raisonné : une aide à la résolution de problèmes numériques

Privilégier la pratique de ce calcul raisonné nous semble un atout pour les enfants IMC aussi bien dans leur vie quotidienne que dans leur scolarité primaire car nous avons rencontré trop de ces élèves qui mobilisent toute leur énergie dans des calculs au détriment d'une activité de compréhension de résolution de problème qu'ils seraient tout à fait capables de mener par ailleurs. Acquérir une certaine agilité mentale en «jouant » sur les nombres et avec eux, les libère d'une surcharge cognitive importante. De plus, la pratique régulière de ce type de calcul permet d'accroitre chez eux une certaine flexibilité mentale face à la résolution d'un problème : ils disposent d'outils plus rapides et moins coûteux cognitivement, donc ils hésitent moins à faire des essais et prennent plus facilement l'initiative d'explorer différentes voies de résolution.

Améliorer les habiletés calculatoires des élèves IMC

Au final, pour favoriser la construction du concept de nombre par les enfants IMC, il ne nous semble pas « utopique » de faire appel à leur intelligence pour compenser leurs difficultés d'action sur le réel et d'expérimentation physique des quantités. C'est pourquoi, nous choisissons de renforcer avec eux les activités de calcul et d'accroître ainsi les multiples bénéfices que nous pensons qu'ils peuvent en tirer, à savoir :

- La meilleure compréhension des règles de calcul qui leur évitera de recourir au dénombrement
- Une mémorisation des faits numériques facilitée par la maîtrise des stratégies de reconstruction des résultats
- La libération de leur espace mental lors de la résolution de problèmes arithmétiques
- La compensation de leur lenteur d'action par une agilité intellectuelle
- L'élaboration d'une méthodologie de calcul qui sera réutilisée tout au long de leur scolarité future. Au collège, on remplacera des nombres par d'autres, qui cette fois, seront plus « simples » non plus en taille mais de nature différente. Par exemple, les décimaux ou les fractions seront remplacés par des entiers. De même, en algèbre les nombres seront remplacés par des lettres.

Au final, nous pensons que, dès le début de l'école élémentaire, les élèves IMC doivent concevoir qu'il y a toujours différentes façons d'exprimer une même quantité, d'écrire un même nombre et d'effectuer un même calcul : ne pas l'avoir expérimenté dès les premiers apprentissages numériques (au sens d'une action mentalisée) représente une entrave pour les apprentissages algébriques qui surviennent au collège.

De l'arithmétique à l'algèbre

En effet, l'usage des lettres et du symbolisme en algèbre ne va pas de soi : dans l'histoire de l'humanité comme à l'école, l'utilisation du calcul dit «littéral » pour résoudre des problèmes fait obstacle. L'algèbre est un modèle de traitement qui se construit au collège et qui constitue un des enjeux les plus importants de l'enseignement des mathématiques à cette étape des apprentissages.

Qu'est-ce que l'algèbre au collège ?

C'est un outil de généralisation qui permet de transférer et d'étendre les capacités acquises sur des expressions numériques à des expressions littérales. En effet, en arithmétique, on effectue des calculs avec des nombres entiers et les opérations élémentaires. En algèbre, on remplace les nombres par des lettres et on calcule sur ces objets comme on le ferait sur un nombre «connu », en utilisant des règles d'action généralisées à partir des règles de calcul sur les entiers. La finalité de l'algèbre c'est de pouvoir résoudre, d'un seul coup, toute une famille de problèmes là où l'arithmétique ne permet d'en résoudre qu'un en particulier (F. Duquesne, 2003)!

Pour résoudre un problème par l'algèbre, on le considère comme déjà fait et on donne un nom à tous les nombres. Ensuite, sans distinguer les nombres connus des inconnus, on traduit les relations exprimées dans le problème en langage symbolique et on enchaîne les suites de calculs qui ne sont que des transformations d'écritures dictées par les règles du calcul algébrique.

Les différentes étapes pour résoudre un problème par l'algèbre

Pour accéder à une démarche de résolution algébrique, différents obstacles vont devoir être surmontés et engendrer plusieurs phases de l'apprentissage.

- **La maîtrise du calcul numérique**

Le transfert des propriétés numériques à l'algèbre suppose d'abord un entraînement au calcul mental (avec des nombres simples), la connaissance explicite des conventions, une pratique abondante de calculs linéaires simples, organisés avec des parenthèses de façons différentes et comparés aux mêmes suites d'opérations, entrées pas à pas dans une calculatrice.

Par exemple, $(2+5)+(3+4)$ ou $(2\times5)\times(3\times4)$ peuvent être calculés dans n'importe quel ordre mais ce n'est plus vrai ni avec la soustraction, ni avec la division, ni lorsque plusieurs opérations sont mélangées ! Dans quel ordre calculer $2+5\times3-4$?

- **L'accès au calcul littéral**

L'utilisation de lettres pour exprimer des nombres déroute nombre de collégiens, IMC ou non. Nous soulignons deux points de vigilance pédagogique pour lever ces résistances. Aider les élèves à :

Distinguer le rôle des lettres

Les élèves ont déjà rencontré des abréviations comme *m* pour *mètre* ou des lettres dans des formulaires comme pour l'aire du rectangle $S = l \times L$ (surface = largeur par longueur) .

Il s'agit dorénavant pour les élèves d'accepter de nouveaux statuts pour une lettre dans une expression numérique : elle peut désigner un paramètre comme dans une identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ou une inconnue comme dans l'équation $25-x^2 = 4$ ou encore une variable dans l'expression de la fonction $f(x) = 2x+3$.

Comprendre les bénéfices de l'utilisation de lettres

L'économie de la traduction algébrique doit être constatée par les élèves. L'enseignant va choisir des activités qui les incitent à raccourcir une suite de calculs dans laquelle un seul nombre varie. Utiliser des formules et des programmes de calcul les aide à comprendre l'intérêt d'abstraire la situation : c'est une économie aussi bien en lecture qu'en écriture.

Par exemple, l'ensemble des calculs 20+2×*3* ; 20+2×*4* ; 20+2×*5* ; 20+2×*6* ; … peut être remplacé par 20+2×*a* , expression dans laquelle a peut prendre n'importe quelle valeur.

- **La signification d'une égalité**

Diverses utilisations de l'égalité en mathématiques font obstacle à l'occasion de ce passage entre l'arithmétique et l'algèbre.

C'est une relation logique : L'apprenant doit prendre conscience que le symbole «= » ne sert pas uniquement à annoncer un résultat comme cela se vérifiait à l'école primaire, mais qu'une égalité est une phrase mathématique qui peut être vraie ou fausse suivant les valeurs attribuées à la lettre. De plus, en mathématiques, une égalité se lit dans les deux sens : il arrive que des élèves reconnaissent la vérité des égalités $3 = 2+1$ et $2+1 = 3$ mais n'acceptent plus l'équivalence des écritures $3 = x$ ou $x = 3$. Ainsi, l'utilisation des lettres rend opaque l'inversion des signes dans l'écriture : la relation d'égalité est logique et non chronologique.

C'est une relation d'identité : entre deux expressions littérales, l'égalité exprime l'identité et ce, malgré les transformations d'écritures liées aux règles du calcul agébrique. Par exemple, les écritures $3(2x+5)$ et $6x+15$ sont différentes puisqu'on n'y utilise pas les mêmes signes mais elles représentent un même nombre. Au travers de cet attachement à la forme des écritures au détriment de l'objet qu'elles représentent, on retrouve une fragilité de la permanence du nombre : il y a transformation des écritures et conservation du nombre.

<u>Une identité «cachée »</u> : le transfert de la propriété de commutativité d'une opération ne va pas de soi lorsque des lettres sont en jeu : par exemple, l'égalité $2\times5 = 5\times2$ peut être comprise et admise par les écoliers sans qu'au collège ils acceptent $\times3 = 3$ ou $x \times 5 = 5x$ (d'autant plus que les conventions conduisent à ne plus visualiser la multiplication par le signe $\times$).

Ainsi, pour prouver l'égalité d'une expression littérale à une autre, le calcul sur les lettres exige des élèves de se dégager des vérifications numériques, donc de maîtriser et de faire confiance aux règles de transformation. C'est pourquoi, nous pensons qu'il est pertinent de multiplier, sous des formes variées, les allers et retours entre le numérique et le littéral.

- **Traduire un problème en équation**

Enfin, une fois établi le sens donné aux expressions littérales, l'étape finale de l'acquisition d'une démarche algébrique consiste à résoudre des équations traduisant des problèmes : c'est ce qui fait sa raison d'être. Encore faut-il convaincre nos élèves de l'intérêt du passage au registre algébrique pour résoudre un problème !

Plus que d'autres collégiens, les élèves IMC vont rencontrer des difficultés pour effectuer ce passage. Comment peuvent-ils abandonner des démarches arithmétiques si chèrement acquises à l'école ? Comment les convaincre que l'algèbre représente un nouvel outil de résolution plus efficace, alors que bien souvent leur niveau en calcul ne leur permet pas d'aborder des problèmes nécessitant véritablement son utilisation ? Comment peut-on accepter de désigner une solution par une lettre alors qu'on ne sait même pas si elle existe ou nommer un nombre et opérer sur lui alors qu'on ne le connaît même pas ? Enfin, la nécessité de limiter la charge de sa mémoire de travail rend le recours à l'écrit incontournable alors que ces collégiens ont souvent des difficultés pour écrire manuellement.

Or, au niveau de l'école primaire, on les a souvent incités à compenser ces difficultés en stimulant leurs capacités verbales et en favorisant l'expression orale des raisonnements. A partir d'un certain niveau de complexité, avec l'introduction des lettres et des règles du calcul algébrique, la verbalisation et la rétention en mémoire deviennent insuffisantes pour organiser et traiter les informations : le recours à l'écrit est incontournable.

L'écrit : un point d'appui pour mémoriser et traiter les informations

En effet, c'est l'écriture qui procure la stabilité et la mémorisation des savoirs mathématiques : l'écrit permet des points d'appui détaillés sur lesquels la pensée peut se développer. On a recours aux symboles parce que l'esprit humain ne peut embrasser beaucoup de choses à la fois.

Pour effectuer une opération, lorsqu'il n'y a pas de trace écrite des calculs, les résultats intermédiaires sont vite oubliés. Si l'exécution des calculs est trop lourde ou trop longue, le traitement du problème lui-même est perturbé.

Dans le domaine numérique, en arithmétique mais plus encore en algèbre, l'écriture a pour fonction d'organiser les calculs et de conserver les résultats intermédiaires.

L'utilisation de logiciels de traitement mathématique

Si s'appuyer sur le langage écrit permet d'alléger la mémoire de travail dans le soutien des raisonnements mathématiques, cela ne signifie par pour autant nécessairement développer et faire appel au graphisme manuel de l'élève. Dans certains cas, on peut proposer à l'élève IMC un auxiliaire de vie scolaire faisant fonction de secrétaire. Le collégien doit alors «penser tout haut », par exemple, en dictant les résultats des transformations d'écritures littérales qu'il a effectuées mentalement. Si cette procédure présente l'avantage de diminuer sa fatigue, il nous semble pertinent de recourir à une solution qui lui donne plus d'autonomie et l'occasion de penser en direct : l'outil informatique. En effet, certains logiciels permettent à ces élèves de transcrire les objets mathématiques et leurs propriétés. A l'origine, certains d'entre eux sont destinés à d'autres fins que celle d'aider les élèves handicapés moteurs mais ils peuvent être avantageusement utilisés par des élèves de collège en mathématiques[2]

Développer leurs capacités d'abstraction

Nous avons vu qu'à l'école primaire, les élèves IMC pouvaient construire le concept de nombre entier en abandonnant le comptage au profit du calcul : la référence aux objets du monde réel est remplacée par la compréhension des propriétés numériques abstraites du nombre. De même, au collège, utiliser l'algèbre plutôt que l'arithmétique pour résoudre un problème, c'est accepter de perdre le sens externe d'une situation, c'est-à-dire son lien avec le réel. En effet, l'algèbre permet de modéliser des situations issues de la réalité mais ce n'est pas la réalité. Or, on ne peut pas passer du réel aux mathématiques sans passage à l'abstraction. Dans une résolution algébrique, où est le sens d'une phrase mathématique comme $-x = -5$ par exemple ?

En fait, au collège, les élèves IMC se retrouvent dans la situation d'abandonner un outil qu'ils ont mis très longtemps à asseoir, au bénéfice d'un autre, sans garantie d'une plus grande efficacité. Par suite, dans ce nouveau monde, ils sont conduits à "bricoler" des lettres, des chiffres, des signes qui sont vides de sens, en suivant des conventions d'écritures mémorisées sous forme de recettes comme "on change de côté donc on change de signe".

[2] Des éditeurs de textes mathématiques, comme Amath ou Typemaths, des tableurs comme Excel, des grapheurs comme Graphmatica, … (pour plus de précisions, se reporter à l'article de F. Duquesne sur les UPI dans la NRAIS n°21).

Ainsi, puisqu'ils n'ont plus la possibilité d'un recours à la réalité pour contrôler leurs résultats, les collégiens IMC vont avoir, d'une part à construire le sens interne du modèle algébrique, d'autre part à acquérir une certaine aisance dans le traitement lui-même pour que ce nouvel outil devienne fiable et «naturel » dans la résolution de problèmes.

En conclusion, pour ces jeunes apprentis mathématiciens, leurs difficultés à dénombrer peut souvent faire obstacle à l'élaboration des nombres entiers mais ils peuvent les surmonter par la compréhension des propriétés, des règles de calcul et des stratégies de décompositions numériques ; leurs difficultés à poser les opérations peut freiner bien souvent leur maîtrise du calcul mais ils réussissent à les compenser par l'écriture et l'effectuation des calculs en ligne. De même, les transformations des écritures algébriques peuvent représenter dans leur esprit un outil de résolution efficace s'ils comprennent la cohérence des règles qui les gouvernent. Notre objectif est, à chaque étape, de les aider à mettre leur intelligence au service de la compréhension des systèmes mathématiques et de la raison d'être de ces systèmes pour expliquer, modéliser et simplifier le monde réel.

Références bibliographiques :

BRISSIAUD R., *Comment les enfants apprennent à calculer*, Paris, Retz, 2003.

DUPERRET J. C., FENICE J. C., L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège in *Repères-IREM*, n°34, janvier 1999.

DUQUESNE F., *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège*, Editions du Cnefei, Suresnes, 2003.

Contact : francoise-duquesne@wanadoo.fr