Les apprentissages mathématiques et leurs obstacles

Françoise Duquesne-Belfais
maître de conférences à l'INS HEA
Suresnes

Plan

- Aspects historiques du concept de nombre
- Les différents processus pour l'appréhender
- Les principaux obstacles à son acquisition
- Quelques pistes de remédiation

Des obstacles posés à l'humanité

- L'idée de nombre longtemps liée à la pluralité

- L'idée de nombre longtemps liée à l'apparence et aux propriétés des objets

- Comment transcrire les réalités numériques

Recourir au nombre pour pallier l'absence des objets

Présence des objets : mise en relation directe par correspondance terme à terme

Absence des objets :

- Absence spatiale : les objets sont dans des lieux différents
- Absence temporelle :
  - les objets ne sont pas encore là et il faut anticiper (temps futur)
  - les objets ne sont plus là et il faut en garder une trace (temps passé)

D'où la nécessité de représenter les quantités pour les comparer

Diverses représentations des objets

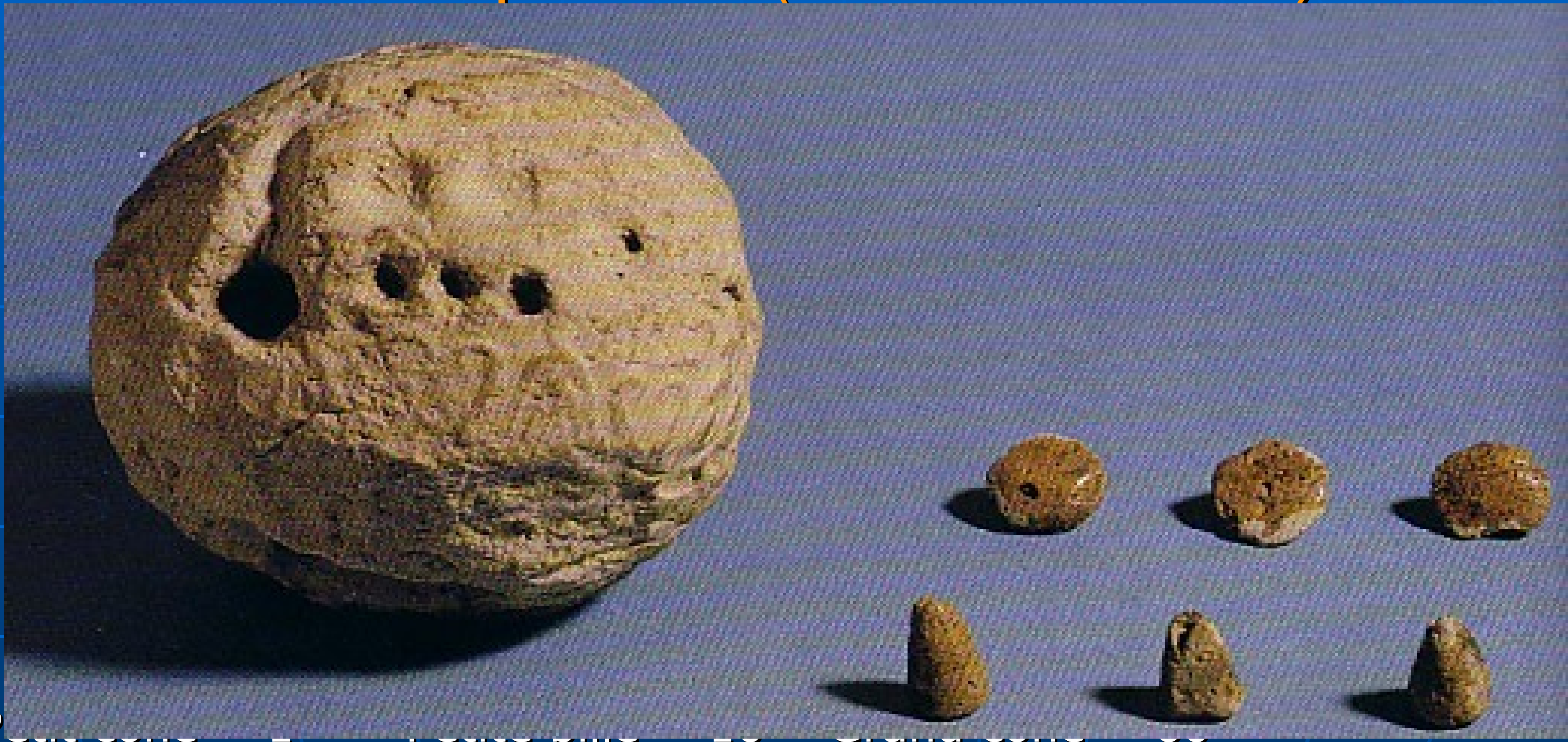
- Des représentations concrètes : dessins, photos
- Des collections témoins d'objets indifférenciables : pions, jetons…
- Des représentations numériques orales et écrites : symboles (chiffres) organisés en système (numération orale ou écrite)

D'où une pluralité représentée par un signe

L'apprentissage de symboles

- Les noms des nombres ou les chiffres indo-arabes permettent d'étendre les compétences humaines:
  - Accès à de nouveaux moyens de calculs: comptage, opérations arithmétiques, tables et algorithmes
  - La mise en relation en symboles et quantités modifie la représentation mentale des quantités : plus précise, nombres organisés sur échelle linéaire

En Mésopotamie (3500 avant J.C.)



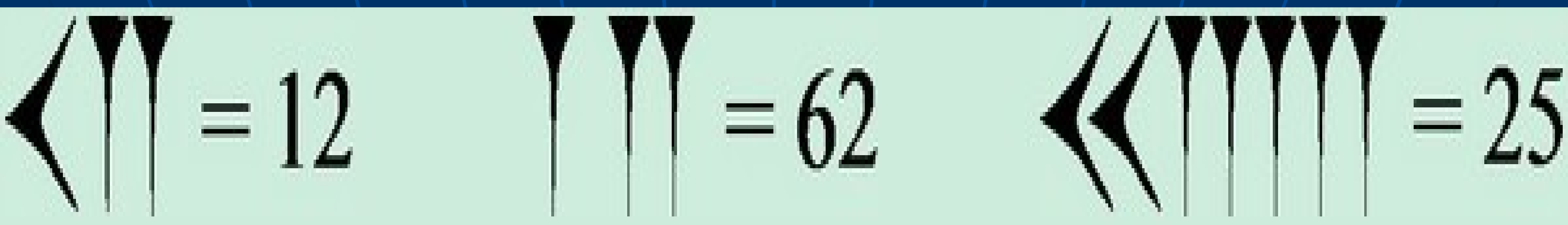
Petit cône = 1 Petite bille = 10 Grand cône = 60

Grand cône percé = 600 Grosse bille = 3600

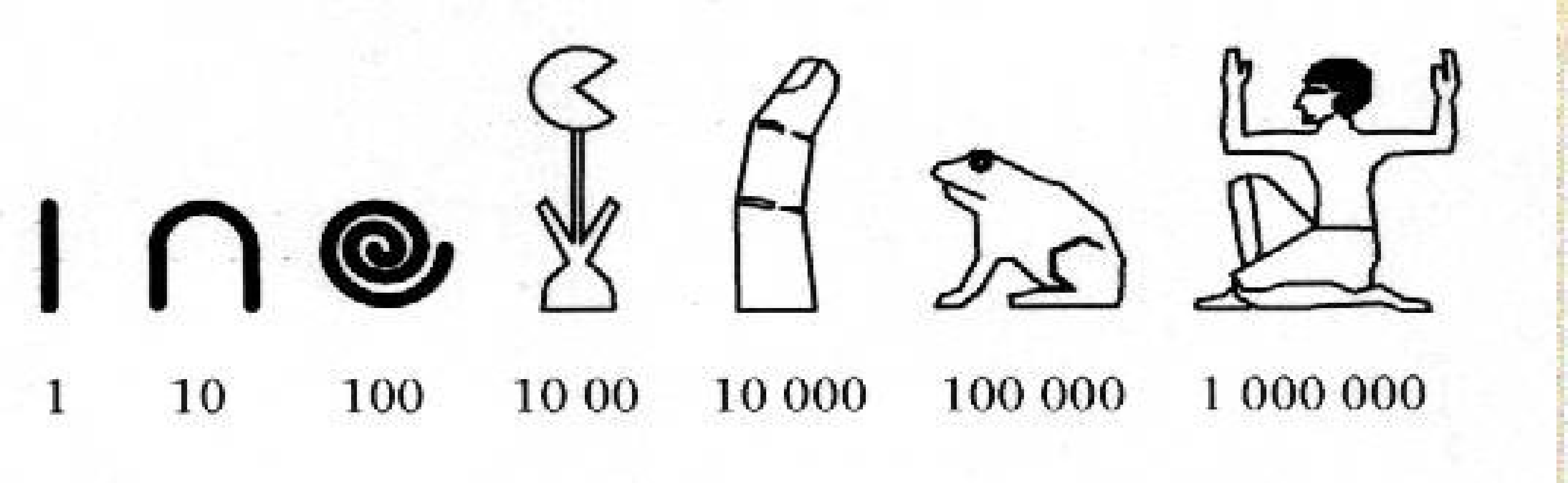
Grosse bille percée = 36000 (principe additif)

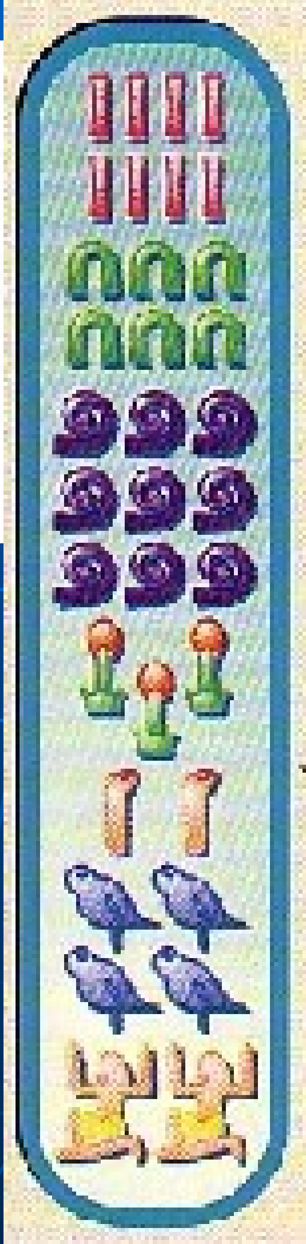
Ecriture cunéiforme babylonienne

(environ 2000 ans avant J. C.)



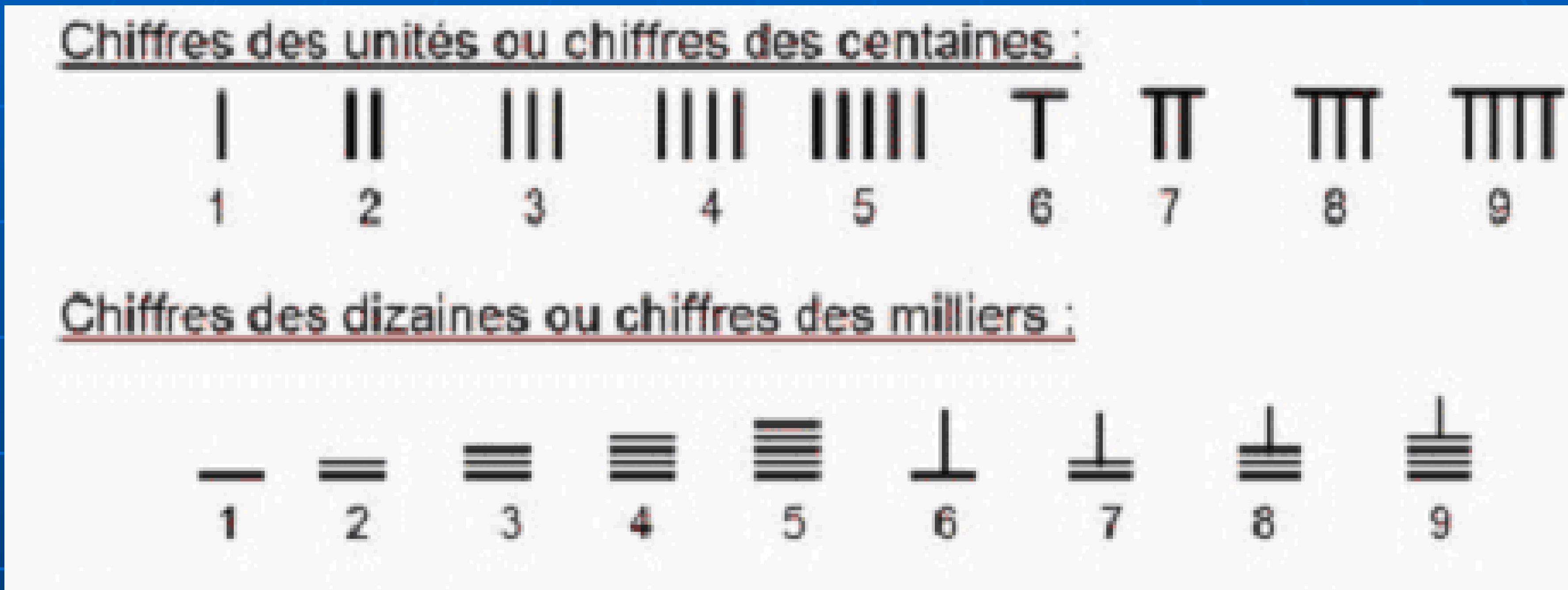
En Egypte (3000ans avant J.C.)





2 423 968

En Chine (XIVème/XIème siècles avant J.C)



Exemple :

Les difficultés d'acquisition de la numération écrite

- La notation positionnelle
  21 12 : Mêmes chiffres mais pas mêmes nombres

- Le rôle particulier du zéro
  Dans 105 et 15 comment évaluer la place laissée libre entre le 1 et le 5 ?

- Le double codage oral et écrit :

quatre vingt dix sept $\longrightarrow$ 97

Différence entre le nombre de mots et le nombre de chiffres

Erreurs de transcodage

- Erreurs lexicales
- ✓ Opposition ordre d'énonciation et ordre de transcription: « quatorze » transcrit 40
- ✓ similitudes entre les sons

"treize" transcrit 16

- Erreurs syntaxiques

« soixante dix sept » transcrit 6017

Privilégier la compréhension du système de numération écrite

- Limiter le recours aux repères auditifs ou oraux

  tr…dans treize, trois ou trente

- Favoriser les repères conceptuels : la compréhension de l'équivalence entre entre 10 unités discrètes et 1 nouvelle unité appelée « la dizaine ».

  changement d'unité

Comment le nombre vient aux enfants?

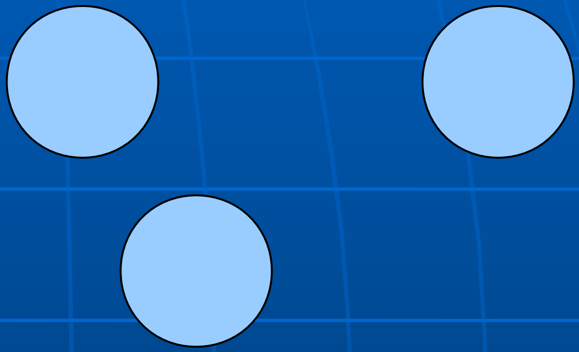
L'enjeu principal du concept de nombre

Représenter une quantité d'objets absents : de façon approximative ou de façon précise.

Les différents processus qui permettent d'appréhender le nombre :

- le subitizing pour les petites collections et l'estimation visuelle au delà de 3 objets
- le comptage et le dénombrement

Nombre et subitizing



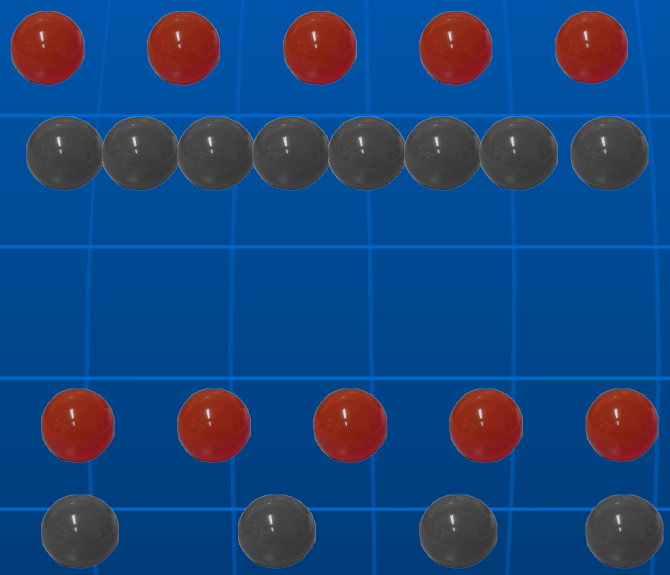
Combien d'objets?

Cette perception :

- ne dépend pas de l'arrangement spatial des objets

- s'arrête aux environs de 3 (ou de 5 selon les auteurs)

Nombre et estimation visuelle



Possibilité de confusion entre la taille de la collection et sa place occupée dans l'espace

Elaborer des procédures de quantification

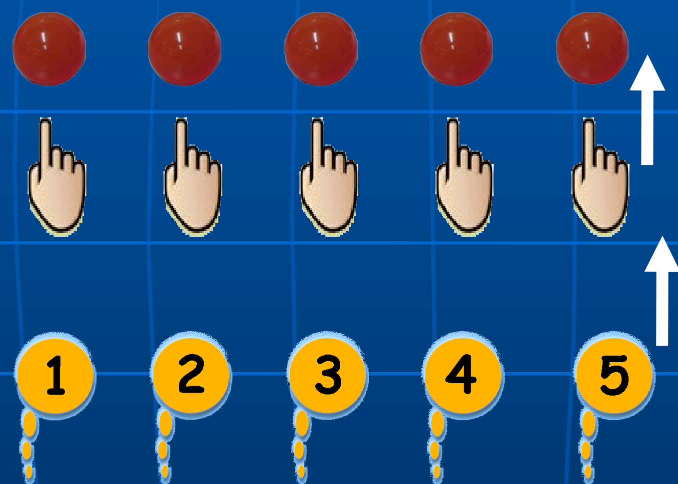
Compter les éléments d'une collection

- Connaissance de la chaîne numérique
  - Suite indifférenciée
  - Chaîne sécable
  - Suite bidirectionnelle

- Pointage des objets un à un
  - coordination œil/main

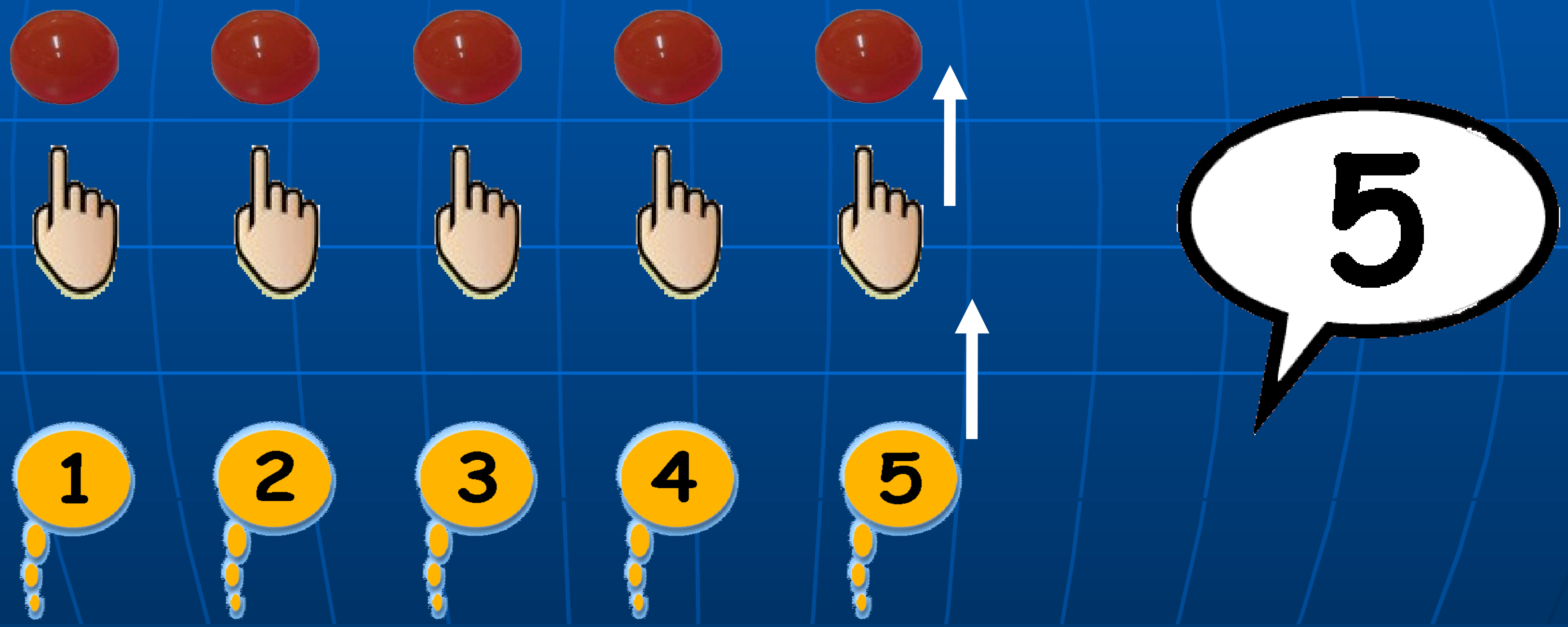
- Mise en correspondance de la comptine et du pointage
  - Synchronisation du rythme d'énonciation et du geste

Comptage : double correspondance



M. P. Chichignoud, « Le développement du concept de nombre chez le jeune enfant », *Grand N*, n°36, CRDP de Grenoble, 1986.

Dénombrement : double correspondance et cardinalisation



Attribuer une signification quantitative aux mots-nombres

- Le nombre ne dépend pas des propriétés des objets (couleur, forme, usage …)
- Le nombre ne dépend pas de l'organisation spatiale des objets à compter
- Le nombre ne dépend pas de l'ordre dans lequel les objets sont comptés
- Les nombres sont identifiés par des mots et des signes
- Les nombres sont organisés à l'aide d'une relation d'ordre

Compter 6 c'est être capable de :

- attribuer le nombre "6" à une collection,
- compter les six objets en en comprenant la signification quantitative,
- désigner la quantité par le mot-nombre "six",
- écrire et lire le chiffre "6",
- savoir que 6 est plus que 3 mais moins que 8,
- construire une autre collection de 6 objets, en utilisant d'autres procédures, en comptant 3 et encore 3 ou 2 et 2 et 2, ou 5 et 1 etc.

Des obstacles possibles au niveau de la comptine

- Mauvaise mémorisation de la comptine et des mots nombres
- Ordre non stable de la suite des mots nombres
- Chaîne non sécable

Des obstacles possibles dans la quantification approximative

- Perception visuelle non fiable
- Agencement spatial des objets
- Estimation de la taille de la collection

Des obstacles possibles dans la quantification précise

Mauvaise coordination dans le dénombrement entre :

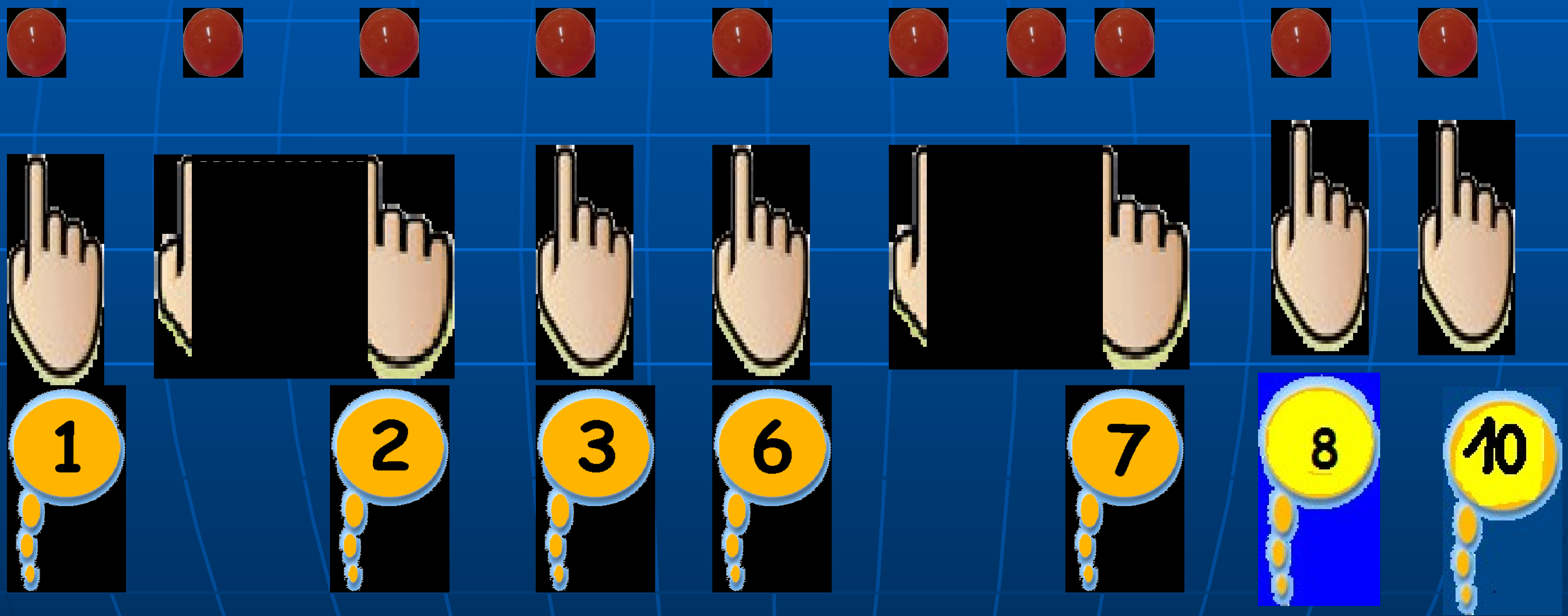
- Le regard
- Le geste de pointage
- L'énonciation de la comptine

Concordance entre diverses procédures

Mauvaise évaluation globale et/ou non concordance des résultats avec le dénombrement

Difficultés à construire l'invariance du nombre

Des erreurs qui déstabilisent d'autres connaissances



Apprendre la suite numérique avec divers supports

- Comptines à chanter
- Compter à partir d'un nombre autre que 1
- Compter entre deux nombres donnés

Apprendre à calculer

Mettre en relation des quantités à l'aide du calcul arithmétique

Par exemple, additionner :

Passer progressivement de la réunion physique d'objets à la récupération directe du résultat en mémoire

On utilise :

- soit les objets ou des représentations des objets : on effectue du comptage

- soit les représentations numériques : on effectue du calcul

L'addition

- Card $(A \cup B)$ = card A + card B
  si $A \cap B = \varnothing$

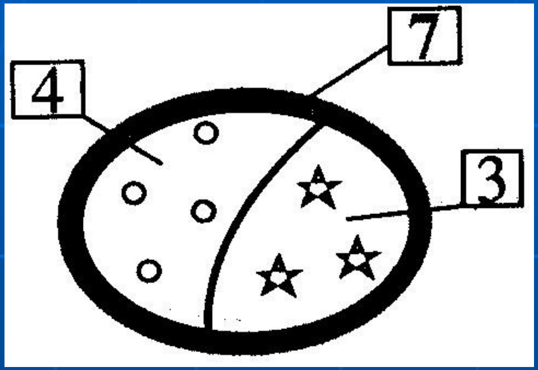
- Pour résoudre le problème additif posé correspondant à la réunion de deux collections, l'enfant peut mettre en œuvre plusieurs procédures de comptage avant d'utiliser le calcul.

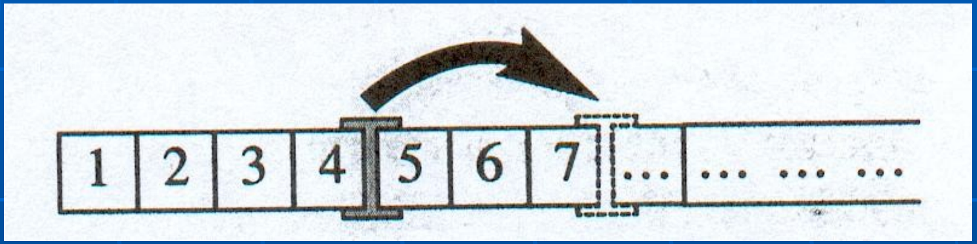
Les procédures de comptage

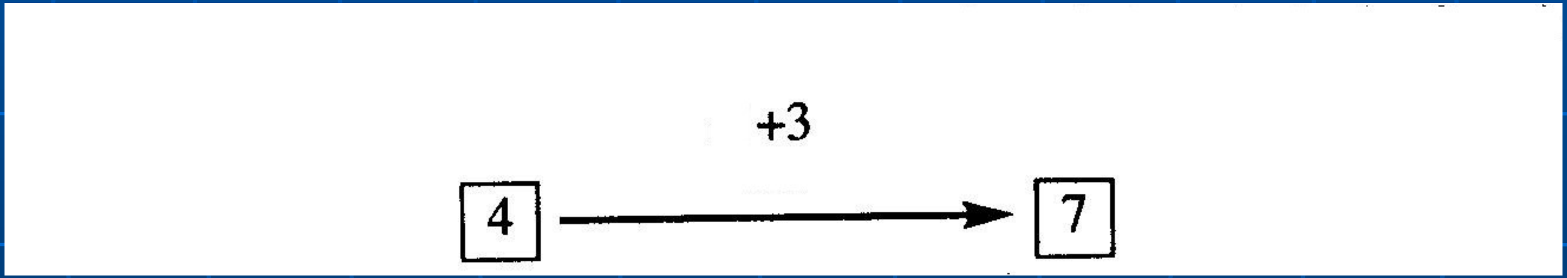
- Comptage de la totalité des éléments après réunion effective des deux collections
- Tout compter en commençant par le premier terme
- Compter à partir du premier terme
- Tout compter en commençant par le plus grand des deux termes
- Compter à partir du plus grand des deux termes

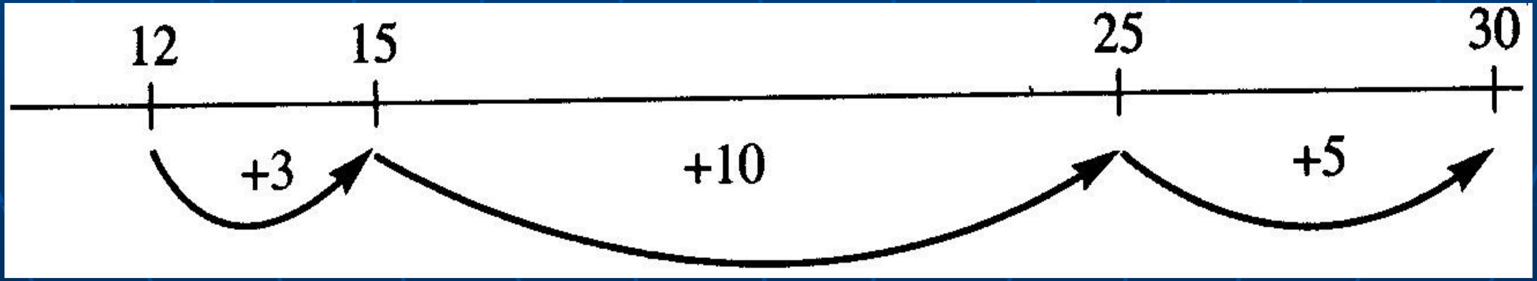
Varier les supports de calcul

4 + 3 = 7 ou 30 – 12 = 18









Comprendre la logique du système numérique

- Ajouter 1 c'est prendre le nombre suivant dans la comptine
- Ajouter 2 nombres consécutifs c'est doubler le 1er et lui ajouter 1 :

  3+4 = 3+3+1 = 6+1 = 7
- Un même nombre est représenté avec différentes écritures numériques :

  6 = 4+2 = 1+5 ou 6 = 3x2 = 6x1 ou 6 = 12/2…
- Les opérations arithmétiques ont des propriétés qui régissent les calculs :

  Commutativité : 2+3 = 3+2, 5x4 = 4x5 …

  Associativité : 2x3x5 = 6x5 = 2x15 …

  Distributivité : 2x(3+4) = (2x3) + (2x4)…

….

Connaître les règles de calcul

- la règle des **doubles**

  $3 + 3 = 6$ et $4 = 2 + 2$

- la règle **n + 1 :** le suivant de n dans la comptine

  $6 + 1 = 7$ et $5 = 4 + 1$

- la règle **n + 5**

  $5 + 1 = 6$ et $7 = 5 + 2$

- la règle **n + 10**

  $10 + 2 = 12$ et $15 = 10 + 5$

Utiliser les règles de calcul

- Exemple 1 : L'utilisation conjointe des deux premières règles permet d'effectuer :

  $3 + 4 = 3 + 3 + 1 \quad = 6 + 1 \quad = 7$

- Exemple 2 :L 'utilisation conjointe de la deuxième et la quatrième règle permet d'effectuer :

  $11 + 3 = \ 10 + 1 + 3 = \ \ 10 + 4 = 14$

  $9 + 3 = \quad 9 + 1 + 2 = \quad 10 + 2 = 12$

L'entraînement régulier à l'utilisation conjointe de ces principales règles de calcul permettra, petit à petit, à l'enfant de se constituer en mémoire à long terme, ce qu'on appelle les "faits numériques" c'est-à-dire d'énoncer directement, par exemple, le résultat d'une addition : 3 + 6 = 9

Raisonner sur les nombres pour contrôler ses calculs

C'est permettre aux élèves de :

- Calculer sans avoir besoin de vérifier systématiquement par le comptage d'objets
- Reconstruire les résultats :
  - en utilisant des stratégies de décomposition et de recomposition des nombres
  - en utilisant les propriétés arithmétiques des nombres

D'où une meilleure mémorisation des faits numériques

Le calcul 7+8 peut s'effectuer de plusieurs manières

- En utilisant de la règle des doubles :
  7+8 = 7+7+1 = 14+1 = 15
- En utilisant de la règle de décomposition additive de 10 à partir de 7 : 7+8 = 7+3+5 = 10+5 = 15
- En utilisant la règle de décomposition additive de 10 à partir de 8 : 7+8 = 5+2+8 = 5+10 = 15
- On peut aussi utiliser de nombreuses autres règles faisant intervenir des soustractions (comme ajouter 9 c'est ajouter 10 et retrancher 1) ou des multiplications (comme multiplier un nombre par 10, 100, … c'est lui ajouter un zéro, ou deux ou plus).

Raisonner sur les nombres pour anticiper un résultat

- Quel est " grosso modo " le résultat de 86-23 ? Est-t-il plus proche de 80-20 ou de 90-20 ?

- Quel résultat trouve-t-on approximativement pour 2451×3154 ? Est-il plus grand ou plus petit que 6000 ?

- Quel est l'ordre de grandeur du résultat de la division de 512 par 11 ? Le résultat tourne-t-il plutôt autour de 5, de 50 ou de 500 ?

Raisonner sur les nombres pour résoudre des problèmes

Acquérir une certaine agilité mentale en “ jouant ” sur les nombres :

- Pour libérer sa mémoire de travail en calcul au bénéfice de la compréhension du problème

- Pour faire des essais, tenter des initiatives dans l ’exploration de différentes voies de résolution

D’où une flexibilité mentale accrue face à la résolution d’un problème

Raisonner sur les nombres

Avoir conceptualisé l'addition c'est savoir que :

- 43+39 c'est 40+3 et 30+9
- l'on peut remplacer une écriture additive par une autre 40+3+30+9 (puis 40+30+3+9) sans changer le résultat.
- plusieurs exécutions sont possibles. Voici la plus rapide : 40+30 (70) puis 3+9 (12)
- La conceptualisation du système de numération permet la conversion de 70 en 7 dizaines et de 12 en 1 dizaine et 2 unités d'où 7+1(8) dizaines et 2 unités soit le résultat final 82.

Conclusion

- Nécessité d'une évaluation et d'une analyse précises des difficultés

- Une prise en compte des multiples facteurs intriqués

accepter différents chemins du développement mathématique