Les apprentissages mathématiques dans une éducation bilingue

Françoise Duquesne

Cnefei Suresnes

Toulouse mai 2004

Le processus de formation des connaissances mathématiques

- Construire des connaissances mathématiques en tant qu'outils
- Transformer les outils mathématiques en objets de savoir

Construire des connaissances mathématiques en tant qu'outils

Les compétences mathématiques se forment à partir de l'expérience

- Pb 1 : j'ai 3 bonbons et maman m'en donne 1 autre, au final, combien en aurai-je ?
- Pb 2 : ce soir j'ai 3 bonbons mais j'en ai mangé 1 à midi. Combien en avais-je ce matin ?
- Pb 3 : en faisant le bilan, dans toute ma journée j'ai gagné 4 billes ; je me souviens en avoir perdu 3 cet après midi mais que s'est-il passé ce matin ?

Les compétences sont organisées en systèmes qui doivent être déstabilisés et réorganisés dans un processus à long terme

Conceptions initiales limitées

- Lorsqu'il est question de « gagner », il faut faire une addition
- Lorsqu'il est question de « perdre », il faut faire une soustraction
- Lorsqu'on effectue une multiplication, à l'arrivée on obtient toujours un résultat plus grand que celui de départ

Les compétences s'enrichissent et évoluent en fonction des situations-problèmes auxquelles sont confrontés les élèves

Remise en cause des conceptions erronées

Ex : effectuer des multiplications d'entiers par des nombres plus petits que 1

- Pb 1 : Un chocolat coûte 0,50 euros. Combien coûtent 8 chocolats ?
- Pb 2 : Un kilo de chocolats coûte 30 euros. Combien coûte 0,5 kilo de chocolats ?

Une démarche pédagogique favorisant l'expérimentation

- **Multiplier les expériences** permet aux élèves d'étendre leurs compétences à de nouvelles situations et donc de **généraliser** leurs connaissances.

- **Construire des situations pédagogiques** variées susceptibles d'amener ses élèves à rejeter les conceptions erronées et à enrichir ses possibilités d'action en étendant la classe de situations pour lesquelles l'outil mathématique est efficace.

Transformer les outils mathématiques en objets de connaissance

On passe de l'implicite à l'explicite en désignant les objets mathématiques

Exemples

- on ne change pas le résultat si on effectue 3x5 ou 5x3
- on ne change pas le résultat si on effectue 3+5 ou 5+3
- on peut échanger les nombres dans l'addition et dans la multiplication sans changer le résultat
- connaissance explicite : *la commutativité*

Les compétences mathématiques n'ont pas le même statut lorsqu'elles s'appuient sur des connaissances implicites ou explicites.

Ce changement de statut ne peut s'opérer que grâce aux langages : langages naturels, français ou LSF, symbolismes particuliers

Les fonctions des systèmes langagiers dans les apprentissages mathématiques

Une langue pour se construire une représentation de la situation à traiter

- Accéder au sens des mots ou des signes pour interpréter la situation initiale
- Analyser l'énoncé pour se représenter le but à atteindre
- Envisager les actions autorisées pour relier l'une à l'autre

*La LSF favorise une compréhension de la mise en activité, **confortable et rapide***

Une langue pour organiser et planifier l'activité de résolution

- Pour accompagner l'action

  S'approprier la situation, tester des procédures, formuler des hypothèses, décomposer l'action en étapes, définir les buts à atteindre…

- Pour contrôler l'action

  Effectuer un retour sur son propre fonctionnement, expliciter sa démarche …

La LSF permet d'alléger la charge de travail dans les échanges ou sous forme d'un langage intérieur pour se centrer sur le raisonnement

Divers langages pour représenter les connaissances mathématiques

- Les langues naturelles
- Des systèmes symboliques
- Un mélange des deux

D'où deux types de difficultés :

- Connaître chaque système avec un lexique précis et une syntaxe rigoureuse
- Etre capable de passer d'un système à l'autre

L'utilisation des langues naturelles en mathématiques

En français comme en LSF

Nécessité d'une bonne maîtrise : rigueur et précision de l'expression, discours structuré

En LSF, nécessité de mettre en commun les lexiques spécifiques utilisés en mathématiques

Les systèmes symboliques

Pour faciliter la décontextualisation des situations

Ex : 3+5 peut servir à représenter plusieurs situations

- *Pb 1 : **j'avais 3 euros hier, maman m'en donne 5 aujourd'hui, j'en ai donc 3+5 en tout***
- *Pb 2 : **j'ai 3 roses rouges et 5 roses jaunes donc en tout j'ai 3+5 roses***
- *Pb 3 : **un petit garçon a 3 ans de plus que sa sœur qui en a 5, donc il a 3+5 ans***
- *Pb 4 : **j'ai perdu 3 billes ce matin et encore perdu 5 billes l'après midi, en tout j'en ai donc perdu 3+5***

Les systèmes symboliques

Pour alléger et simplifier les procédures de traitement

Par exemple, les problèmes suivants se ramènent tous à la résolution du système :

$$x+y=19$$

$$y=x+3$$

- Pb 1 : J'ai 19 livres à ranger sur 2 étagères. L'une doit contenir 3 livres de plus que l'autre. Combien de livres contient chaque étagère ?

- Pb 2 : Dans 3 ans, le double de l'âge actuel de Marie sera 19 ans. Quel âge a-t-elle ?

- Pb 3 : Si Paul prend deux fois plus de billes que Pierre et que Jean lui en donne 3, Paul a 19 billes. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Comprendre la cohérence des règles d'organisation des systèmes symboliques

Exemples

- Les lois de la numération décimale :

23 et 32 ne représentent pas la même quantité
214 c'est 21 dizaines et 4 unités

- Les règles de l'algébrisation :

5x+3 est un nombre
5x+ 3 = 18 est une phrase interrogative

La LSF permet d'enseigner ces règles en leur donnant du sens

Passer d'un système de signifiants à un autre

La compréhension fondée sur la coordination de divers registres permet le transfert

Exemple : les quantités peuvent être représentées dans divers systèmes

- Par les objets des collections
- Par des représentations analogiques des objets (images, dessins..)
- Par des collections témoins abstraites (pions, jetons, doigts…)
- Par des représentations symboliques (mots-nombres, combinaisons de chiffres…)

La LSF peut favoriser la capacité à passer d'un registre à l'autre en respectant les caractéristiques propres de chaque système

La fonction calculatoire des signifiants

- Pour décomposer l'activité mathématique en étapes
- Pour conserver les résultats intermédiaires
- Pour autoriser des retours sur la suite des calculs

L'utilisation des signifiants écrits

L'utilisation de signifiants écrits

Pour organiser les informations et les raisonnements

Exemples

- Développer l'expression $3(2x+5)-4(2x-1)^2$ s'effectue en plusieurs étapes successives

- Démontrer qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme requiert au moins 2 étapes :

  - d'abord démonter que AB=CD

  - et ensuite que AB//CD

L'écrit permet de séquentialiser les relations entre les informations et les raisonnements

L'utilisation de signifiants écrits

Pour mémoriser les résultats et contrôler les étapes d'un raisonnement

Exemples

- Pour effectuer une opération, on la dispose en tableau pour conserver les calculs intermédiaires

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 32 \\ \hline 50 \\ 75 \\ \hline 800 \end{array}$$

- Pour développer une expression algébrique, on écrit la suite des transformations d'écritures :

$3(2x+5)-4(2x-1)^2$
$6x+15-4(4x^2-4x+1)$
$6x+15-16x^2+16x-4$
$-16x^2+22x+11$

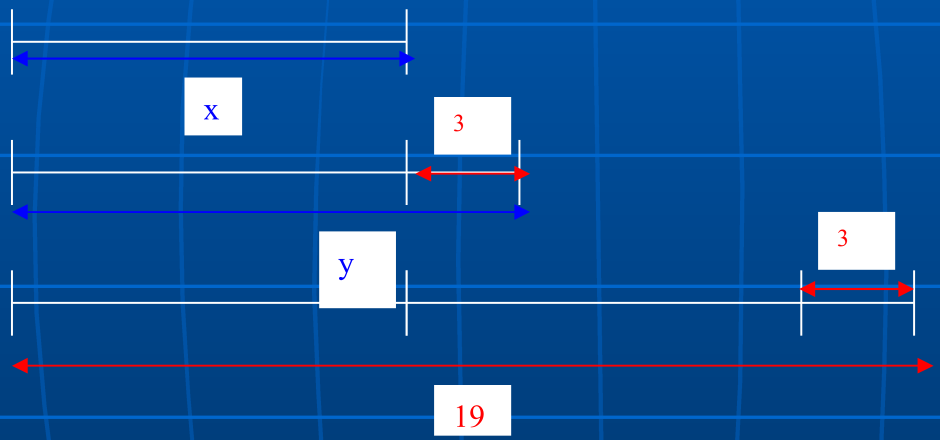
L'utilisation pédagogique des schémas

La LSF ne permet pas le recours à l'écrit

Les schémas peuvent servir de relais entre l'oral en LSF et le langage formel mathématique

Exemple

J'ai 19 livres à ranger sur 2 étagères. L'une doit contenir 3 livres de plus que l'autre. Combien de livres contient chaque étagère ?



x
3
y
3
19

L'utilisation de signifiants écrits

Pour prouver qu'une proposition mathématique est vraie

En mathématiques, prouver c'est :

- Communiquer
- Convaincre avec des arguments rationnels
- Utiliser un raisonnement valide : la démonstration

Pour apprendre à démontrer, mettre les élèves en situation de :

- Expliciter et formuler ses résultats
- Eprouver sa solution dans un débat régi par les règles de la logique
- Formaliser l'enchaînement des pas de déductions sous forme d'un écrit : une démonstration

La LSF est une condition favorable pour franchir ces étapes lorsque les élèves en maîtrisent sa structure et un lexique précis.

Comprendre l'organisation logique d'une démonstration

- Les propositions ont un statut : axiome, définition, hypothèse, théorème
- Les propositions ont un rôle : prémisse, énoncé-tiers, conclusion
- Les pas de déduction enchaînent des prémisses qui deviennent des conclusions intermédiaires, ces conclusions deviennent les prémisses du pas suivant …

Exemple

<u>1e pas :</u>

Hypothèse : « ABCD parallélogramme »

Enoncé-tiers : « Si on a un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux »

Conclusion : « AB=CD »

<u>2e pas :</u>

Prémisse : « AB=CD »

2e hypothèse : « AB=4 »

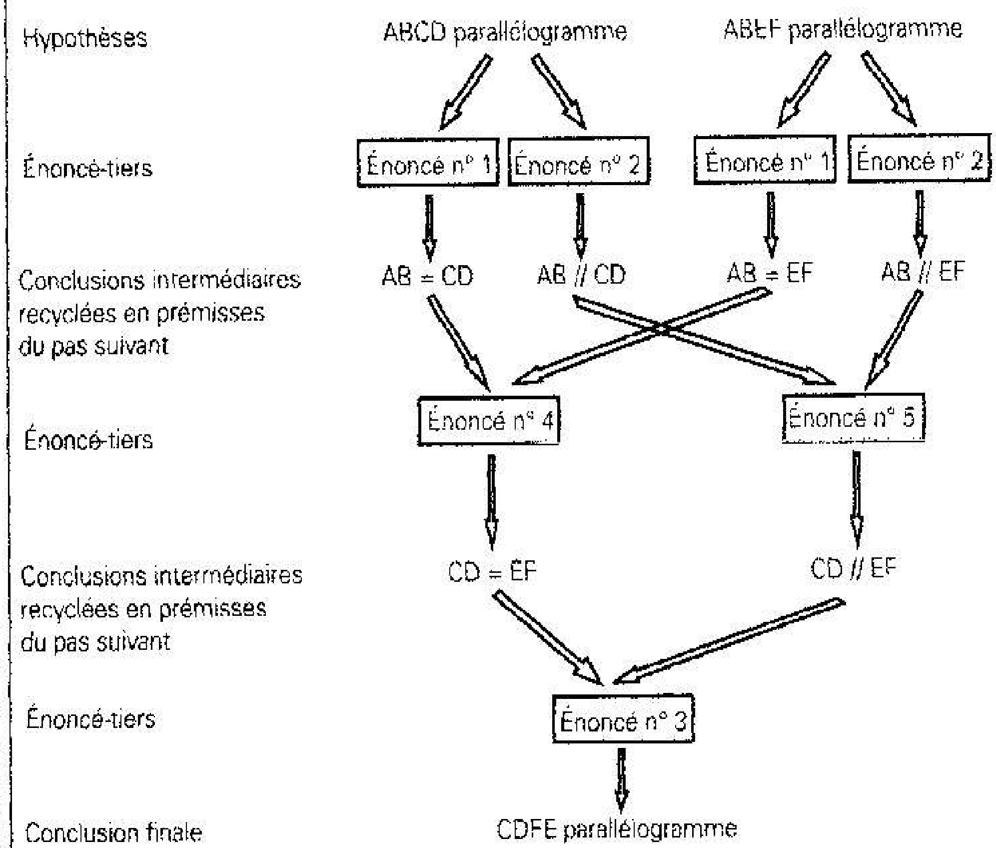
Enoncé-tiers : «transitivité de l'égalité »

Conclusion : « CD=4 »

L'utilisation pédagogique des graphes

Un exemple de graphe pour organiser une démonstration

Reprenons le problème des parallélogrammes précédent :
On considère deux parallélogrammes ABCD et ABEF. Démontrer que le quadrilatère CDFE est aussi un parallélogramme.



On filme les élèves qui décrivent les graphes en LSF et on effectue avec eux un travail de réécriture à partir des vidéos

Obstacles à surmonter et perspectives de réussite

- Les mathématiques ne sont pas un langage mais une connaissance
- Privilégier la compréhension et la maîtrise des systèmes symboliques
- Apprendre aux élèves à mobiliser leurs connaissances dans plusieurs registres de signifiants et à savoir naviguer de l'un à l'autre
- Augmenter leur niveau de compétences en LSF

En conclusion

- Enseigner l'acte de pensée mathématique plutôt qu'un savoir institué
- Faire comprendre les mathématiques comme un modèle de la réalité et du monde
- Permettre aux élèves de recourir à une langue complète, riche et structurée dès le plus jeune âge