Françoise Duquesne-Belfais

Colloque « les dyscalculies » St Hyacinthe novembre 2011

Accompagnement pédagogique et rééducatif pour des élèves présentant des troubles en calcul

La question centrale de cette journée est : comment les professionnels peuvent-ils intervenir efficacement auprès d'enfants présentant des troubles du calcul ?

Les chercheurs reconnaissent eux-mêmes que les « cas purs » de troubles en calcul sont rares, et l'expérience montre que des « plaintes » pour échecs graves en calcul concernent une population relativement vaste. Dans un souci de pragmatisme, nous serons donc relativement « souples » et traiterons ici de tout enfant dont on signale des performances insuffisantes dans le domaine numérique. Les plaintes les plus courantes ont par exemple rapport à des enfants qui n'ont pas acquis la numération ou qui ne savent pas résoudre des problèmes : ils maîtrisent une technique opératoire mais ne savent pas dans quelle situation l'utiliser. Souvent une investigation à l'aide des tests classiques révèle des réussites à certaines épreuves faisant appel à des apprentissages répétés et pouvant être automatisés qui contrastent avec des échecs à des tâches exigeant abstraction, logique, planification de l'action, recherche de stratégie nouvelles, etc.

De nombreuses études ayant prouvé que les apprentissages numériques sont très liés au développement de la conceptualisation (Brissiaud, 2002 ; Fischer, 2009), la question initiale devient alors pour nous : comment, en tant que praticiens, mettre en place des situations d'apprentissage qui favorisent la conceptualisation des notions numériques fondamentales ?

Lorsqu'il entre en classe, l'enfant devient un élève, c'est-à-dire un sujet soumis à des règles principalement didactiques. C'est dans le cadre de la didactique, qui étudie les processus de transmission et d'appropriation des connaissances, que nous nous situerons ici, et plus particulièrement dans celui de la didactique des mathématiques. Ce point de vue nous invite à situer notre réflexion en relation avec le système didactique, au travers des relations entre l'enseignement (point de vue du maître), l'apprentissage (point de vue des élèves) et les savoirs.

Du côté de l'enseignant, son travail est complexe. Il doit choisir les situations et les tâches, préparer et penser à l'avance les aides qu'il mettra à la disposition des élèves selon qu'ils achopperont à telle ou telle phase de la progression vers l'élaboration du concept visé. En classe, ses capacités à organiser les élèves en groupes, à gérer de façon simultanée des activités différentes et à organiser les formes d'interactions entre enfants propices aux aides mutuelles déterminent l'efficacité de sa démarche. La nécessité de connaître ses élèves suppose, de sa part, suffisamment de distance pour observer simultanément ce qui se passe pour le groupe et pour chaque individu. Il le fera d'autant mieux qu'il saura clairement où il veut aller en ayant repéré les conceptions initiales de ses élèves, donc l'écart entre ce qu'ils ont comme représentation et les savoirs visés, ainsi que les obstacles que ce savoir nécessite de surmonter.

C'est ce dernier point qui nous semble le moins maîtrisé par la plupart des praticiens, qu'ils soient enseignants, éducateurs ou rééducateurs, en particulier pour ce qui concerne les concepts mathématiques. Et c'est donc sur ces interactions conceptions-concepts-obstacles que nous allons principalement porter notre attention.

Du côté de l'élève, sa principale ambition et sa motivation première sont de ne pas se « tromper », de ne pas faire d'erreurs. Pourtant, par le discours qu'elle provoque, par le message qu'elle envoie, par les repères qu'elle crée, l'erreur est essentielle : elle est ce qui façonne la relation enseigner/apprendre. Ce sont ces erreurs, ces dysfonctionnements ou ces différentes modalités de fonctionnement que nous nous proposons d'étudier en mettant en évidence l'importance de l'analyse de l'activité réelle de l'élève en situation de résoudre une tâche : le triplet situation-tâche-activité du sujet fera l'essentiel de nos préoccupations dans cette présentation.
Nous proposerons donc quelques pistes possibles pour remédier et intervenir auprès de ce public : comment observer et repérer les difficultés et les potentialités des élèves, comment analyser et interpréter leurs productions mathématiques erronées, et comment différencier et adapter ses stratégies d'intervention pédagogique ou rééducative. Nous illustrerons notre propos avec l'exemple du concept de fraction pour faire le lien avec l'étude qui suivra immédiatement.

Connaitre ses élèves

Certains échecs échappent à notre compréhension car ne correspondant pas aux obstacles rencontrés classiquement par les élèves. Ainsi, l'impact que peuvent avoir des troubles instrumentaux sur des apprentissages élaborés n'est pas toujours facile à repérer : par exemple, les conséquences des troubles visuo-spatiaux sur l'apprentissage des fractions. Cependant, il convient d'être attentif aux difficultés des élèves, sans pour autant rester focalisé sur les manques et négliger les capacités, car c'est sur elles que l'on pourra se fonder pour étayer les apprentissages. La capacité d'un élève à s'engager dans une tâche est souvent surprenante. Par exemple, certains enfants dyspraxiques peuvent échouer dans des tâches de simple dénombrement de collections, alors qu'ils réussissent dans d'autres tâches plus complexes comme effectuer des calculs, de telle sorte que ce sont les résultats sûrs et justes de leurs calculs qui vont servir de contrôle à leur comptage. C'est pourquoi on se positionnera dans une conception constructiviste de la notion de difficultés en considérant ces dernières comme l'expression d'une modalité de fonctionnement.

Identifier les difficultés et les ressources des élèves

Il s'agit pour le praticien, d'observer, d'écouter l'élève en difficulté, pour connaître l'état de son savoir à un moment et dans une situation donnés. L'observation en cours de résolution d'une tâche, les brouillons, les évaluations, les entretiens, permettent de garder une trace de ce que les apprenants font et de comment ils font. En particulier, lorsqu'ils se trompent, les erreurs produites révèlent une forme de connaissance, elles signalent non des manques mais la présence de conceptions qu'il convient d'analyser plus précisément. Y a-t-il persistance, récurrence, reproductibilité, sont-elles isolées ? Sont–elles des indices qui peuvent être mis en relation et en cohérence avec d'autres ? C'est à partir de ces données que le praticien peut en déduire les compétences et dysfonctionnements de l'élève. Pour comprendre les raisons de ses difficultés, il lui faut effectuer une analyse fine en repérant les divers facteurs qui interviennent et leurs interactions.

Comprendre les productions des élèves ou la nécessité d'une analyse systémique

Certaines conceptions voulaient que les difficultés d'apprentissage soient uniquement attribuables aux caractéristiques individuelles de l'élève. Il nous semble actuellement qu'elles doivent être davantage analysées à partir d'une vision systémique de la situation de l'élève. Dans cette perspective, elles sont considérées comme la résultante de l'influence réciproque des caractéristiques personnelles de l'élève et de celles de sa famille, de son milieu social ainsi que de l'école. Se situent-elles au niveau perceptif, cognitif, psychoaffectif, relationnel, au niveau de l'effectuation motrice ? Tiennent-elles à la médiation pédagogique ? Sont-elles liées au rapport que l'élève entretient avec le savoir ou aux concepts mathématiques eux-mêmes ? Le schéma suivant permet d'illustrer les différents facteurs pouvant interagir pour expliquer les difficultés, les sommets de cette pyramide représentant les caractéristiques des quatre pôles impliqués, les arêtes signifiant les relations entre les pôles, et chaque face imageant les interactions entre les pôles et les axes.

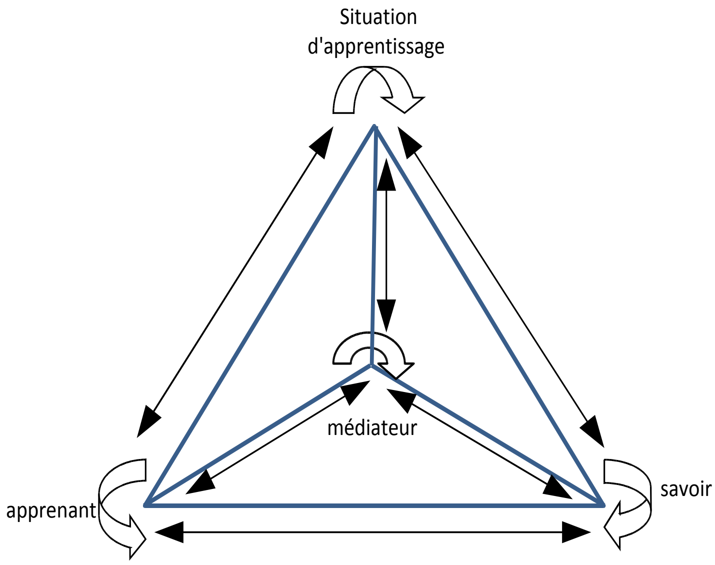


Figure 1

Ce système peut servir de cadre pour analyser à la fois le choix des tâches que le praticien propose aux élèves, les traitements qu'ils mettent en œuvre et les erreurs qu'ils produisent. Ce type d'analyse sera utile aussi au moment de l'élaboration des dispositifs de remédiation.

Par exemple, si nous nous concentrons sur le pôle apprenant, nous isolerons les difficultés liées aux caractéristiques des élèves ; de même, le pôle savoir permettra d'identifier les difficultés inhérentes aux concepts mathématiques concernés.

Si nous mettons en relation les pôles apprenant, médiateur et situation d'apprentissage, nous interprétons des difficultés comme liées au contrat didactique, c'est-à-dire que ce sont moins les connaissances ou les caractéristiques d'un élève qui sont en cause que la perception qu'il a de ce qu'on attend de lui dans la situation qui lui est proposée. Ainsi, aux yeux d'un élève, un problème posé à la fin d'un chapitre sur l'addition devra nécessairement être résolu par une addition, ou bien dans un problème il pensera qu'il doit utiliser toutes les données.

En référence à ce schéma, nous choisissons de nous intéresser plus particulièrement ici à la face situation/apprenant/savoir, c'est-à-dire aux conceptions relatives à un savoir que se forgent des élèves pour traiter une situation.

Identifier des conceptions qui font obstacle aux concepts

La notion de conception, pour nous, renvoie à un ensemble de connaissances cohérent que l'élève élabore pour comprendre le monde qui l'entoure et traiter les situations qu'il y rencontre, de façon adaptée. Ces conceptions se forment dans des situations familières ou relativement simples, c'est-à-dire qu'elles ont une portée locale. Par exemple, nombreux sont les enfants qui pensent que le soleil tourne autour de la terre puisque dans leur expérience quotidienne, ils « voient » le déplacement du soleil d'un point à un autre de l'horizon. C'est par apprentissage qu'on arrive à concevoir l'inverse en se détachant des aspects perceptifs et en construisant des concepts scientifiques comme le mouvement de la terre sur elle-même ou autour du soleil.

Exemple en mathématiques avec la production d'un élève relative aux nombres décimaux :

$2,3 \times 3,4 = 6,12$

$(0,2)^2 = 0,4$

$7,14 > 7,4$

$4,5 \times 10 = 4,50$

Ces résultats sont faux, mais ils révèlent une conduite de la part de l'élève qui a une cohérence : « je fais comme s'il n'y avait pas de virgule, et j'applique les règles que je connais sur les entiers aux deux entiers qui composent ces nombres ». Pour cet élève, un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers indépendants l'un de l'autre. Cette représentation implicite de ce qu'est un nombre décimal va fonctionner comme un « obstacle » à l'apprentissage, c'est-à-dire qu'elle va résister à l'enseignement : pour conceptualiser la notion de nombre décimal il est nécessaire de prendre conscience de la rupture entre le concept d' « entier » et celui de « décimal ». C'est le franchissement de l'obstacle qui sera une condition d'apprentissage réussi.

En mathématiques, il existe de nombreux exemples de conceptions de cette nature :

- lorsqu'on a une quantité qui augmente, c'est nécessairement une addition ;
- lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le nombre de départ augmente toujours ;
- pour résoudre un problème de division, on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit ;
- un carré est toujours posé sur sa base sinon c'est un losange ;
- deux droites perpendiculaires sont toujours horizontales et verticales.

Exemple de conception : pour agrandir, il faut ajouter

Prenons un exemple classique, dû à Brousseau (1998), et qui concerne le concept de fraction. Il s'agit d'une situation problème dans laquelle les représentations erronées mènent à une impasse, et les nouvelles représentations (visées) sont les seules qui permettent de traiter la situation. C'est le cas de la situation de l'agrandissement du puzzle ci-dessous :

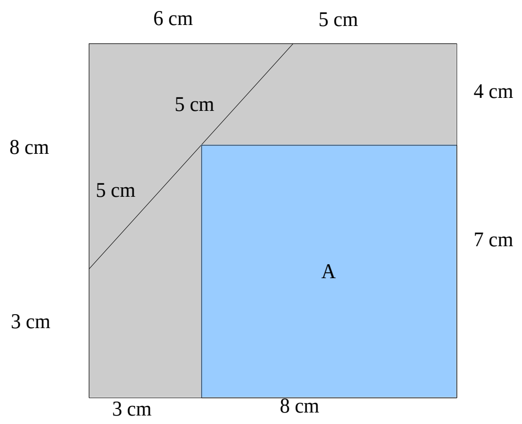


Figure 2

Dans cette situation, le professeur montre aux élèves un carré de 11 cm de côté (voir figure 2). Ils doivent reproduire ce puzzle, mais en l'agrandissant de telle sorte que le côté qui mesure 4 cm dans le puzzle original mesure 7 cm dans la reproduction. Il faut pouvoir faire les mêmes formes avec le nouveau puzzle. Presque tous les élèves (de 4^{e} ou 5^{e} primaire) commencent par ajouter 3 cm aux côtés de chacune des pièces, car ils ont la conviction que « pour agrandir, il faut ajouter ». Mais ils finissent par se rendre compte que les pièces du puzzle ne se raccordent plus et/ou qu'elles n'ont plus la même forme. Petit à petit, ils comprennent la nécessité de respecter une proportionnalité entre les longueurs des segments correspondants des deux figures. Au final, pour résoudre cette situation, ils ont dû constater l'inefficacité de leurs conceptions antérieures et s'orienter vers une nouvelle notion : les rapports de proportionnalité. Leur première conception de l'agrandissement va fonctionner comme un obstacle à l'apprentissage, c'est-à-dire qu'elle va résister à l'enseignement de la proportionnalité.

L'enseignement a pour but d'aider l'élève à prendre conscience du caractère erroné ou insuffisant de ses conceptions pour lui permettre de les rejeter et de s'en approprier de nouvelles. Plus l'écart entre les conceptions et les concepts scientifiques visés par l'enseignement sont éloignés, plus elles sont ancrées et plus les obstacles et les résistances seront difficiles à lever. La diversité des conceptions qui peuvent naître sur un sujet donné, la variété des dysfonctionnements qu'elles peuvent occasionner, la résistance que certaines d'entre elles peuvent provoquer en s'opposant à la construction de connaissances valides, imposent la nécessité de les prendre en compte de manière spécifique pour élaborer des situations qui permettent le franchissement de l'obstacle qu'elles génèrent. Si la situation est alors construite autour du dépassement d'obstacles identifiés, les obstacles deviennent un moteur dans la construction des connaissances. C'est donc le choix des situations d'apprentissage qui permet cette remise en cause des connaissances antérieures et le franchissement des obstacles qui génère une transformation des structures de pensée.

Concevoir des situations d'apprentissage

Concevoir des situations d'apprentissage, c'est notamment prévoir des tâches que l'élève devra résoudre par une action. Par exemple, il est tout à fait possible de proposer des situations-problèmes à des élèves qui ont des difficultés importantes, alors que bien souvent on pense qu'il convient de ne les mettre face qu'à des activités simples et concrètes. Dans le travail de préparation, il s'agit de décomposer les tâches demandées aux élèves. L'analyse peut alors porter sur le repérage des obstacles qui peuvent surgir tout au long du travail demandé (obstacles de réalisation dans l'activité ou obstacles conceptuels). Une fois que ces obstacles sont repérés, alors il est plus facile d'anticiper les aides possibles à proposer à certains élèves, et ainsi rendre la situation pédagogique accessible.

L'activité de l'élève aux prises avec une tâche

La tâche indique ce qui est à faire, l'activité c'est ce qui se fait réellement. L'activité, c'est tout ce que le sujet met en œuvre pour accomplir une tâche dans une situation :
- ses conceptions ;
- sa compréhension du sens et de l'intérêt de la tâche dans la situation ;
- sa motivation à se mettre au travail et à répondre aux injonctions qui lui sont faites ;
- les opérations cognitives qu'il met en jeu ;
- les actions physiques nécessaires à son accomplissement.

Le point de vue de la tâche est un point de vue « objectif ». Il décrit les conditions qu'il faut nécessairement prendre en compte pour que l'action soit réussie. Par exemple, résoudre un problème est une action qui demande à ce que soient respectées certaines caractéristiques de la situation pour être efficaces, quelle que soit la manière dont l'apprenant s'y prend pour mener son action.

Le point de vue de l'activité est un point de vue qu'on pourrait qualifier de « subjectif », au sens où il vise à décrire ce que fait effectivement l'apprenant : pour une même tâche, les manières de faire des élèves sont nombreuses, y compris à niveau de réussite équivalent.

L'activité en vient toujours à déborder la tâche, et concevoir une situation d'apprentissage requiert donc deux niveaux d'analyse : l'analyse a priori de la tâche et l'analyse a posteriori qui fait un détour par l'analyse de l'activité. L'analyse a priori renvoie à l'identification des obstacles inhérents à la tâche et aux concepts visés qui elle-même facilite l'analyse de l'activité des élèves a posteriori. Par exemple, l'analyse des obstacles liés au concept de fraction et des situations résistantes permet de mieux reconnaitre les stratégies que les élèves peuvent inventer pour dépasser ces résistances.

Des tâches pour apprendre

Concevoir une situation d'apprentissage, c'est choisir une tâche de manière à permettre un apprentissage. En effet, ce n'est pas parce qu'un élève effectue une tâche qu'il apprend. L'activité qu'il y déploie peut être simplement productive : il produit un résultat, réussit, mais sans nécessairement mobiliser le savoir impliqué dans la résolution du problème auquel il est confronté et dont l'enseignant vise la construction.

La distinction entre activité productive et activité constructive (Samurçay et Rabardel, 2004, p. 155) invite à concevoir des tâches qui soient effectivement porteuses d'un problème mettant en jeu le savoir visé. Elle permet aussi à l'enseignant d'envisager une différenciation de l'activité productive tout en ciblant une même activité constructive. En clair, selon les élèves, on peut viser la construction d'un même savoir à travers des tâches différentes. Croiser les caractéristiques de l'élève et celles du savoir auquel on a l'intention de le confronter permet d'adapter la tâche envisagée. Pour l'appropriation de ce savoir, ce principe intervient notamment sur les « dimensions objectives de la situation qui vont affecter l'activité » (Pastré, Mayen et Vergnaud, 2004). On peut ainsi moduler les difficultés objectives de la tâche.

Si, par exemple, on pose comme objectif de savoir traduire un énoncé de géométrie sous la forme d'une figure, l'activité productive des uns consistera à utiliser un compas, tandis que d'autres, en raison de leurs difficultés, motrices ou praxiques par exemple, seront amenés à s'appuyer sur un logiciel de géométrie.

Ainsi à l'école, l'action d'enseignement vise l'activité constructive de la part des élèves, l'activité productive n'étant que le support, le moyen du déploiement de l'activité constructive. Donc, le travail d'un enseignant, c'est de proposer des tâches (activité productive) dans l'espoir qu'elles vont générer de l'apprentissage et du développement (activité constructive).

Différencier les apprentissages

Cet objectif ne peut s'actualiser qu'en différenciant les interventions, c'est-à-dire en prenant en compte la diversité des élèves et en considérant l'apprentissage comme un acte différent pour chacun d'eux. Mais l'attention à la diversité est infiltrée par le rapport du praticien à la différence.

Des représentations de la différence

La différence est parfois conçue comme une question de nature. De cette assignation à différence peut découler une analyse des difficultés vécues par un élève en termes médicaux et leur traitement être pensé d'un point de vue avant tout thérapeutique. À l'inverse, cette conception naturalisante est susceptible de se traduire par une attitude accueillante de l'enseignant envers un enfant singulier, avec le risque de glisser vers un respect des différences mal compris, marqué par un manque d'ambition pédagogique et éducative qui laisse l'élève à ses difficultés « naturelles ». Quand elle est vue comme une question de degré, la différence risque de ne pas être suffisamment prise en compte. Négligeant l'originalité des difficultés et des capacités d'un élève, méconnaissant la diversité des modalités d'apprentissage, on pourra accroître les mesures de soutien, mais en vain dès lors qu'elles ne font que répéter un enseignement inadapté. En se détachant de l'individu, la conception selon laquelle la différence est une question de contexte, ou de situation, peut être considérée comme une

avancée, mais dès lors qu'elle accorde peu d'attention au sujet, elle constitue une même erreur épistémologique, qui relève du « paradigme de la simplification » (Morin, 1994) : dans les deux cas, la pensée est disjonctive, elle sépare des éléments qui sont étroitement liés, car la différence, les difficultés et le handicap résultent de l'interaction de caractéristiques personnelles avec un contexte.
La différence est donc une question complexe, qui invite l'enseignant à prendre conscience des différentes conceptions qui la traversent, en particulier de la sienne, et qui exige, pour un traitement plus objectif, encore une fois, un diagnostic de la situation à laquelle est confronté l'élève, incluant l'observation et l'analyse de l'activité qu'il y déploie.

Principaux éléments de différenciation

Différencier la pédagogie, c'est donc mettre en place des dispositifs de traitement des besoins des élèves pour faciliter l'atteinte des objectifs de l'enseignement. Il ne s'agit pas nécessairement de différencier les objectifs, mais de permettre à tous les élèves d'atteindre ces objectifs par des voies différentes. Voici quelques stratégies de différenciation possibles[1].
- La différenciation au niveau des processus attendus signifie que l'enseignant accepte et valorise que chacun propose ses propres procédures sans nécessairement établir de hiérarchie entre les diverses solutions. Il n'y a pas de « bonne » solution, mais la mise en commun est l'occasion de reconnaître des solutions distinctes et d'en comparer les avantages et les limites.
- La différenciation des productions renvoie aux différentes ressources mises à disposition et aux contraintes plus ou moins imposées en fonction des besoins des élèves. Ces étayages peuvent se décliner au niveau du temps imparti pour résoudre la tâche, des supports matériels fournis pour soutenir l'activité, ou encore du mode de présentation de la situation.
- La différenciation par les tâches consiste à moduler les exigences et proposer des tâches de nature ou de durée différentes, qui peuvent ou non engendrer une activité constructive de même ordre.

Ainsi, avec un élève dyspraxique, l'appropriation du concept de nombre est un objectif partagé avec les élèves « ordinaires », mais éventuellement selon une démarche divergente. La première forme de différenciation pourra privilégier un apprentissage du dénombrement, moyennant un aménagement de la tâche facilitant les coordinations visuo-motrices. La deuxième forme de différenciation pourra consister à accepter un dénombrement de collections d'objets déplaçables sans exiger de dénombrement de collections figurées dans un fichier. Enfin, la dernière forme de différenciation consisterait à contourner la voie d'apprentissage de la majorité des élèves. S'acharner à faire dénombrer un enfant qui se trompe systématiquement et ne trouve jamais le même résultat à son comptage, risque de déconstruire la notion de permanence du nombre (lorsque l'on compte de plusieurs façons une collection d'objets, on trouve toujours le même nombre). Pour lui, on essaiera de solliciter des ressources cognitives suffisamment intactes pour qu'il puisse parvenir à pallier ses difficultés neuro-visuelles, par exemple, le raisonnement logique, pourtant normalement plus tardif dans le développement d'un autre enfant.

---

[1] Pour des exemples d'un enseignement différencié des mathématiques à l'école primaire, on peut se reporter à Duquesne-Belfais et Girodet (2009, 2010, 2011).

Nous nous proposons maintenant d'illustrer notre propos avec l'exemple des fractions. La fin de mon exposé présentera les caractéristiques de ce concept, les diverses conceptions qui se côtoient, comment l'enseignement prend en compte ces différentes significations et les obstacles que doivent surmonter les élèves pour conceptualiser les fractions. L'intervention qui suit présentera une étude sur les difficultés d'élèves de 1re année du second degré aux prises avec les fractions.

Comment mieux comprendre les difficultés d'apprentissage du concept de fraction

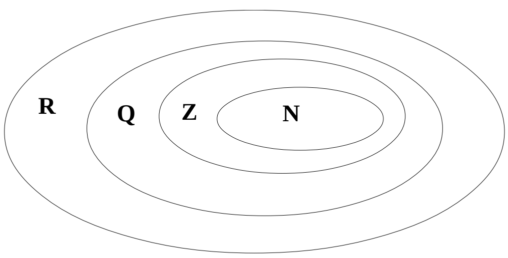
Afin d'identifier les difficultés qu'éprouvent les élèves, il est utile de clarifier ce qu'est une fraction.

Les fractions dans notre histoire

Les Égyptiens de l'Ancien Empire (IVe et IIIe millénaires avant notre ère) seraient les premiers à avoir utilisé les fractions (Guitel, 1975). Le papyrus de Rhind, conservé actuellement au British Museum, serait le plus ancien texte qui nous apprend la façon dont on calculait avec les fractions. D'après ce texte, toutes les fractions égyptiennes avaient pour numérateur le nombre 1 et tout rapport devait être décomposé à l'aide de sommes de fractions unitaires. Par exemple, 2/5 s'exprimait par le calcul 1/3 + 1/15 (soit 5/15 + 1/15 ou 6/15 ce qui fait 2/5 en réduisant par 3).

S'ensuivent alors les fractions sexagésimales des Babyloniens et les fractions alphabétiques des Grecs. Les systèmes de numération et de notation inventés par toutes ces civilisations sont très complexes et la manipulation des fractions est réservée à l'usage des administrateurs et des savants.
Ce sont les Arabes au VIIe siècle qui introduisent le système de position décimale et la symbolisation moderne des fractions. C'est à cette époque, que le nombre jusque-là réduit aux entiers naturels, s'élargit progressivement aux rationnels et irrationnels, aux nombres algébriques, décimaux, négatifs, transcendants et infinis. La fraction, qui autrefois était utilisée comme opérateur, va désormais acquérir le statut de nombre et celui de rapport au Xe siècle ; actuellement une fraction est une façon de noter un nombre qui s'appelle rationnel.
Les caractéristiques essentielles des nombres rationnels sont les suivantes :

- les écritures fractionnaires sont du type a/b ;
- on a la possibilité de les écrire à partir d'une infinité de fractions d'entiers. On parle alors de fractions équivalentes ; 2/3 ou 4/6 ou 6/9 …
- entre deux nombres rationnels, il existe une infinité de nombres rationnels, alors qu'entre deux nombres naturels successifs, il n'y a pas d'autre nombre naturel. Cette caractéristique est propre aux nombres rationnels.



Par exemple, tout nombre naturel (6/3) est un rationnel, mais certains rationnels (3/5) ne sont pas des entiers. Les nombres rationnels admettent des écritures décimales périodiques (1/5 = 0,2 c'est un nombre décimal) ou non périodiques (1/3 = 0,333… ce n'est pas un nombre décimal) mais certains nombres réels n'admettent pas d'écriture fractionnaire ou décimale *(π)*.

Les fractions dans l'enseignement

Si l'on consulte les programmes de l'enseignement et les manuels scolaires, trois situations sont le plus souvent proposées pour aborder les fractions : les fractionnements, les rapports et les calculs fractionnaires. À ces situations sont rattachées les notions de fractions opérateurs, de fractions rapports et de fractions nombres.

- Les situations de fractionnement

En début de scolarité primaire, la notion est abordée le plus souvent à partir de situations de la vie courante avec par exemple les partages de tartes. La fraction permet alors de quantifier la partie d'un tout. Par exemple, lorsqu'on parle d'une demi-pomme et d'une demi-classe, chacune de ces expressions désigne une moitié d'une grandeur, et cette moitié est encore une grandeur (la fraction est appelée opérateur, car elle opère sur des grandeurs). À l'opération qui consiste à couper en deux parts égales et de prélever une part, on doit associer la fraction 1/2. L'enjeu didactique est de faire correspondre un seul et même nombre à plusieurs situations différentes du monde physique.

- Les rapports

Un rapport se définit comme un mode de comparaison entre deux grandeurs de même nature. Dans ce cas, on recherche la fraction qui exprime le rapport entre ces deux grandeurs (fraction rapport). À l'école primaire et dans notre vie quotidienne, ce concept est souvent utilisé pour exprimer les sous-unités de mesure (1 dl = 1/10 de l ; 1 cm = 1/100 de m ...), les pourcentages ou les échelles numériques d'une carte géographique, d'un plan ... L'enjeu didactique de cette signification en tant que rapport amène l'idée de fractions équivalentes et les questions de proportionnalité.

- Le calcul fractionnaire

Dans ce cas, les fractions sont des nombres que l'on peut comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser grâce à des règles spécifiques. Le calcul fractionnaire est très présent dans nos classes primaires, mais dans la vie quotidienne nous ne l'utilisons que rarement, l'emploi des nombres décimaux étant beaucoup plus commode. L'enjeu didactique du calcul fractionnaire réside dans l'importance de son usage en algèbre.

Au final, les fractions sont peu travaillées d'un point de vue conceptuel. L'essentiel des activités proposées en fin de cycle primaire est centré sur l'acquisition de procédures et de techniques de calcul : réduire au même dénominateur, simplifier, transformer en fractions équivalentes … ; constat confirmé par les évaluations nationales :

Évaluations nationales de CM2 en 2011

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

60/2 62/10 602/100 620/100

B/ Entoure le nombre à virgule égal à 3/10

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

C/ Écris ¼ sous forme de nombre à virgule :

Quelles difficultés les élèves rencontrent-ils ?

De nombreux travaux montrent que l'apprentissage des fractions constitue une difficulté importante pour la plupart des enfants (Nunes & Bryant, 1996 ; Bolon, 1997 ; Rouche, 1998 ; Brousseau, 1998 ; Rosard & co., 2007 ; Carette & co., 2009). Nous avons rappelé les différences fondamentales entre les nombres entiers et les nombres rationnels du point de vue mathématique, mais elles ne sont pas toujours prises en compte par les élèves.

La généralisation abusive des connaissances sur les entiers fait obstacle

Comme pour les décimaux, les élèves traitent souvent numérateur et dénominateur comme étant deux nombres entiers sans lien entre eux et appliquent dès lors aux fractions des procédures propres aux nombres entiers.

S'ensuivent alors des erreurs typiques :

- la fraction n'est pas considérée comme un nombre : « *la fraction n'est pas un nombre, c'est deux nombres* » disent certains élèves (Rosard & co., 2007) ;
- dans des tâches d'addition de fractions où par exemple 1/4 + 1/2 = 2/6 ;
- pour comparer des fractions quand il semble que 1/5 > 1/3. La conception sous-jacente à cette production, qui fonctionne avec les naturels, mais qui fait obstacle avec les fractions, peut se traduire par : « *si le nombre est plus grand, c'est que la grandeur qu'il représente est plus grande* ». Or lorsqu'il s'agit de fractions, un plus grand nombre au dénominateur ne signifie pas qu'on obtient une quantité plus grande, mais plus petite au contraire. Dans ce sens, j'ai relevé un biais de raisonnement d'un commentateur de TV qui a dit « … *il y a un monument sur trois, quand ce n'est pas un sur quatre, qui tombe en ruine* » sous-entendu, 1/4 c'est plus que 1/3. Il en est de même pour une jeune fille dyslexique et aussi dyscalculique qui m'explique ses difficultés en mathématiques. Elle est scolarisée en 4^{e} de collège (soit en 3^{e} année du second degré). Elle dit que 2/3 < 1 lui semble « *impossible puisque les nombres en haut et en bas sont plus grands que 1* ».

- Une autre difficulté apparaît dans les situations de multiplication : multiplier des naturels mène toujours à obtenir un résultat plus grand, tandis que ce n'est plus le cas avec les rationnels : par exemple 8 x ¼ = 2. Lorsqu'on multiplie par un nombre plus petit que 1, le résultat diminue.

Cette utilisation persistante des règles qui régissent les naturels fait obstacle au passage des entiers vers les rationnels et ce d'autant plus que les connaissances des entiers sont largement antérieures à celles des rationnels.

Division et fractionnement d'une unité

Rémi Brissiaud (2002) propose une autre approche de l'enseignement des fractions. Il distingue notamment *partition de la pluralité* et *fractionnement de l'unité* :

- La première notion est liée à la division de 3 par 4 par exemple : 3 pizzas sont partagées entre 4 personnes, il s'agit d'un partage équitable d'une quantité discontinue (nombre donné par le numérateur) en plusieurs parts.
- La notion de fractionnement de l'unité correspond à trois quarts : le numérateur est sans dimension, et agit comme opérateur sur la fraction de l'unité : par exemple, un enfant prend 3 fois un quart (¼) de pizza.

L'enjeu didactique consiste alors à établir une relation entre les deux conceptions : diviser 3 par 4 c'est prendre un quart 3 fois. Selon Brissiaud, l'équivalence entre partition de la pluralité et fractionnement de l'unité fonde le concept de fraction, mais ne va pas de soi dès lors que la fraction est supérieure à l'unité. Ce constat est confirmé par le travail de Rosard & al. (2007) : « pour au moins la moitié » de leur public, la division du numérateur par le dénominateur est rejetée.

Des difficultés multiples

Pour synthétiser les différentes études citées, les élèves possèdent une conception limitée des fractions : ils conçoivent souvent les fractions comme une étiquette attachée à une situation de partage ou de fractionnement dessiné (généralement avec des quantités continues seulement). Ils ne réussissent pas à concevoir qu'un même nombre (par exemple un demi) peut représenter différentes situations (différents objets, différentes figures). Leurs conceptions sont souvent réduites à des conduites stéréotypées : *une fraction est toujours une partie plus petite que 1* ; *il faut diviser puis multiplier* ; etc. Ils éprouvent des difficultés dans les relations entre fractions et unité, dans l'utilisation de représentations variées des fractions. Ces différentes conceptions incitent les élèves à utiliser le langage des fractions sans en comprendre pleinement la nature.

Organiser les apprentissages des fractions

Afin de surmonter l'obstacle lié aux connaissances sur les naturels, il semble nécessaire d'amener les élèves à concevoir les fractions comme de nouveaux nombres en effectuant une réorganisation conceptuelle : il s'agit d'intégrer les rationnels comme des nombres d'une autre sorte, avec leurs propriétés et leurs règles de fonctionnement propres. Pour permettre aux élèves de mieux comprendre le passage de la fraction partie d'un tout et de la fraction rapport à la fraction nombre, il semble intéressant de développer une conception flexible de l'unité : l'unité peut être un objet entier ou une collection; l'unité peut être une partie d'objet qui est à son tour partagée (partages successifs) ; l'unité peut être reconstruite à partir des différentes parties ; etc. (Carette & al., 2009). Dans ce sens, Rouche (1998) propose une progression à partir de situations diversifiées de partage en parts égales, d'abord sur des objets puis sur des représentations dessinées et enfin sur des mesures d'objets (pour fractionner des nombres), le tout en variant les quantités discrètes (partition de la pluralité) et continues (fractionnement de l'unité).Enfin, pour élargir les conceptions des fractions qu'ont les élèves, il semble important de construire le concept de fractions à partir de situations diversifiées issues de la vie quotidienne, avant d'utiliser le langage et les symboles pour écrire les fractions.

Dans l'étude que nous allons vous présenter maintenant, nous avons fait l'hypothèse que les difficultés des élèves dans le domaine des fractions avaient leur origine dans une mauvaise compréhension conceptuelle des fractions, ce qui se traduisait notamment par une utilisation de symboles mathématiques sans accès à leur signification. Nous avons choisi d'étudier plus spécialement, au niveau d'une classe de 6^e, le passage des représentations figurales vers les représentations numérales et inversement.

Bibliographie

Astolfi, J.-B. (1997). L'erreur, un outil pour enseigner. Paris : ESF.

Bolon, J. (1997). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. Grand N, n° 52, IREM de Grenoble.

Brissiaud , R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In Bideaud J. & Lehalle H. Le développement des activités numériques (pp. 265-291). Paris : Hermès.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Byrnes, J.P. & Wasik, B.A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology, 27(5), (pp. 777-786).

Carette, V. & Content, A. & Rey, B. & Coché, F. & Gabriel, F. (2009). Etude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire. Université libre de Bruxelles. [en ligne], consulté en 2010 sur http://www.ulb.ac.be/facs/sse/img/fractions.pdf

Duquesne-Belfais, F. & Girodet, M.-A. (2009). Le numérano - matériel cycles 1 et 2, Paris : Nathan.

Duquesne-Belfais, F. & Girodet, M.-A. (2010). Collection Tous en maths, fichier CP et guide pédagogique, Paris : Nathan.

Duquesne-Belfais F. & Girodet M.-A. (2011). Collection Tous en maths, fichier CE1 et guide pédagogique, Paris : Nathan.

Duquesne-Belfais, F. & Girodet, M.-A. (à paraître). Collection Tous en maths, fichier CE2 et guide pédagogique, Paris : Nathan.

Ficsher, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale, *ANAE*, n°102, pp117-133, Paris.

Grégoire, J. (2008) : Évaluer les apprentissages : les apports de la psychologie cognitive. Bruxelles : De Boeck Supérieur.

Guitel, G. (1975). Histoire comparée des numérations écrites. Paris : Flammarion.

Nunes T. & Bryant P. (1996). Children Doing Mathematics. Oxford, U.K. : Blackwell.

Pastré P. & Mayen P. & Vergnaud G. (2006). La didactique professionnelle. Revue Française de Pédagogie, n° 154, (pp. 145-198). [en ligne], consulté le 08 avril 2011, URL : http://rfp.revues.org/157

Rosard, D. & Van Nieuwenhove, C. & Jonnaert, P. (2007). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves ? [en ligne], consulté en juillet 2011 sur http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip/imprimersans.php3?id_article=61&nom_site=MathVIP&url_site=http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip

Rouche, N. (1998). L'esprit des sciences. Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? Paris : Ellipses.

Samurçay, R. & Rabardel, P. (2004). Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences : propositions. In R. Samurçay & P. Pastré (dir.), Recherches en didactique professionnelle, Toulouse : Octarès, (pp. 163-180).

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels, in J. Brun (dir.). Didactique des mathématiques, pp.196-242. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.