LES TROUBLES DES APPRENTISSAGES EN MATHEMATIQUES A L'ECOLE : POINT DE VUE DU PEDAGOGUE :

Mme Françoise DUQUESNE-BELFAIS,
maître de conférence,
INSHEA, Suresnes, 92

Les conditions pour apprendre :

Des hypothèses sur les facteurs causaux :

Au niveau des apprenants :

- l'environnement socio-culturel
- les capacités cognitives propres à chaque enfant
- la motivation, la confiance en soi en tant que mathématicien
- le rapport à l'école, à l'apprentissage, au savoir ou aux mathématiques

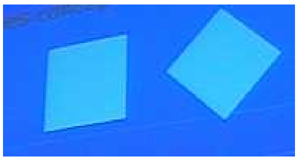
Au niveau des professionnels, en particulier des enseignants :

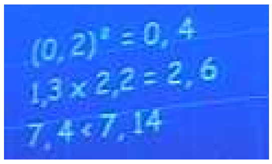
- Une plus grande préoccupation pour les retards dans le domaine langagier
- Un domaine peu prisé en général des professionnels (ça met en cause leur propre rapport aux savoirs mathématiques)
- Un déficit de formation des professionnels dans ce domaine des mathématiques
- L'état embryonnaire des outils d'évaluation pour évaluer les difficultés d'apprentissage en mathématique

Au niveau des concepts mathématiques eux-mêmes:

Des écarts entre les conceptions des enfants (à partir du monde qui les entoure, de la perception, de leur propre expérience) et les concepts scientifiques. Le travail du pédagogue est d'amener petit à petit ces conceptions vers les concepts scientifiques :

Exemple : un carré dans la conception initiale d'un enfant, bien sûr il a 4 côtés égaux, 4 angles droits, mais en plus, il faut qu'il soit toujours posé sur sa base. Il y a une propriété supplémentaire, alors que dans le concept scientifique on sait que l'orientation spatiale de l'entité carré n'interfère pas sur les propriétés du carré.





Autre exemple avec les décimaux qui est très fréquent et récurrent : les enfants vont s'appuyer sur la connaissance des entiers qu'ils maîtrisent mieux, et ils vont considérer les décimaux comme étant des entiers, séparés par une virgule, et on traite les entiers de gauche entre eux et les entiers de droite entre eux ; et du coup 7,4 est plus petit que 7,14 car 4 est plus petit que 14.

Là on va retrouver dans la résolution de problème ce qu'a dit Rémi Brissiaud ce matin : « gagner », c'est additionner, multiplier augmente le résultat (et quand on multiplie par un nombre plus petit que un et que le résultat diminue, c'est le désespoir car c'est contre nature !), et on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit…

Ça vient du quotidien de l'enfant, de la perception première, mais ça peut venir aussi de l'école ; en tant qu'enseignant, on peut renforcer cela au lieu de contrecarrer ces conceptions premières fausses pour amener l'enfant vers des concepts scientifiques.

Que ce soit des troubles spécifiques ou non, les manifestations de ces troubles d'apprentissage en mathématique, on doit remédier à ces difficultés en essayant de proposer à l'enfant des pistes un petit peu plus opérationnelles.

Quels sont les enjeux scolaires ?

Dans notre système scolaire, la compréhension des premiers apprentissages du **concept de nombre** représente un enjeu extrêmement important, parce que c'est la base de tous les apprentissages arithmétiques. Et eux-mêmes vont constituer le préambule, à toute la compréhension des systèmes mathématiques beaucoup plus complexes, qui vont arriver après avec les fractions, les décimaux, et qui vont se continuer au collège avec l'algèbre, les nombres relatifs et les réels.

Bien sûr dans la vie quotidienne on sait aussi que le nombre est très important, il sert de jalon pour se repérer dans l'espace comme dans le temps et c'est donc un levier de compréhension du monde. Favoriser cet accès à tous les enfants représente un enjeu qui moi me mobilise en tant que formatrice d'enseignants en mathématiques.

Selon les auteurs, on trouve entre 38 et 50% des difficultés en mathématique qui viennent de difficultés à comprendre et manipuler le système de numération.

Pour mieux comprendre les performances et les contre performances que peuvent effectuer certains enfants, je vais développer des exemples sur :

A - Les enjeux de la connaissance du système numérique :

Je propose de rapidement replacer ces notions fondamentales, dans le cadre des connaissances mathématiques elles-mêmes, et de celui du développement de l'enfant.

1. Notre système numérique est l'aboutissement de plusieurs milliers d'années de travail de l'esprit humain :

Sa simplicité n'est qu'apparente. Comme dans le langage, les générations successives ont cherché à réduire le nombre d'éléments utilisés et donc du coup, leur ont attribué différents rôles au sein d'un système très subtil. Non seulement l'enfant doit y avoir accès mais en plus, il va devoir comprendre la structure générale de ce système. Quand on demande à un enfant d'apprendre à dénombrer en quelques années, on ne réalise pas à quel point il va être obligé de digérer des acquisitions de toute l'humanité.

On sait que l'humanité a mis longtemps pour avoir accès à l'aspect abstrait de l'aspect du nombre ; comment arriver à extraire une ressemblance, du pareil, du même entre 2 pommes, 2 enfants, 2 micros… au delà des différences ?

Les historiens ont noté que pendant très longtemps

- l'idée de nombre est restée liée à la pluralité : tout ce qui dépassait 2 apparaissait comme une quantité très importante et impossible à dénombrer. Dans ces cultures, le langage nomme « un », « deux » et « beaucoup » après. D'ailleurs dans notre langage, il reste la proximité entre « très » et « trois »

- L'idée de nombre est liée à l'apparence et aux propriétés des objets : un groupe d'indiens au Canada a 7 systèmes de noms de nombres : des noms de nombres pour des choses plates, des noms de nombres pour les animaux, des noms de nombres pour les canoës ou pour le temps… ils n'arrivent pas à s'abstraire des propriétés des objets. On se rend compte que le nombre nécessite un haut niveau d'abstraction pour arriver à se décoller de ces propriétés.

- Et un autre niveau d'abstraction va être requis pour transcrire ces réalités numériques, comment transcrire ces quantités, et là aussi il va y avoir différents niveaux abstraits pour le faire, de toutes les figurations directes (je pense aux entailles sur les os, les cailloux ou calculus de nos ancêtres ; dans certaines populations ce sont les parties du corps qui permettent de représenter les quantités), jusqu'aux symboles que nous connaissons dans les systèmes de numération. Il y a là aussi tout un échantillon d'abstraction pour arriver à représenter ces quantités.

➔ Tous ces paliers d'abstraction vont être autant de causes de difficultés dans les apprentissages

2. L'enjeu principal va être de pallier l'absence des objets :

Le nombre permet de remplacer la présence des objets ; lorsque les objets sont présents, si on a à les comparer , on va pouvoir effectuer une correspondance terme à terme. Ce n'est plus possible si les objets sont absents : absence spatiale (les objets sont dans des lieux différents) ou absence temporelle (les objets ne sont pas encore là –anticiper le fait- ou les objets ne sont plus là – garder une trace de)

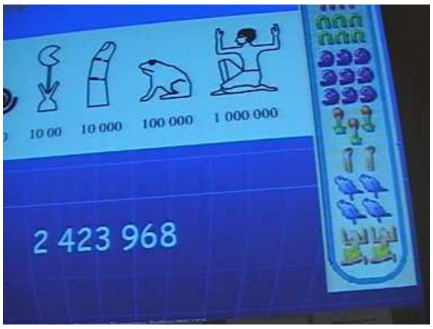
➔ D'où la nécessité de représenter les quantités, pour les estimer ou les comparer, et c'est le nombre qui va nous le permettre.

<u>Comment ?</u> - par des représentations concrètes, figuratives : dessins, photos

- Des collections témoins d'objets indifférenciables : pions, jetons…

- Des représentations numériques orales et écrites : lexique (chiffres ou mots) organisé en système (numération orale ou écrite)

Mais on va rencontrer une difficulté : lorsqu'on représente les objets par d'autres objets ou des collections témoins, la pluralité se « voit » encore mais lorsqu'on les représente par des symboles organisés en système de numération, la pluralité n'est plus aussi « visible »



Exemple sur la représentation des quantités en Egypte ancienne, on voit encore la pluralité (cartouche), alors que sur un système de position plus moderne, quand le nombre est représenté par une suite de signes ordonnés, on ne voit plus cette pluralité, puisqu'elle est donnée par la position des chiffres dans cette suite.

Tout ça peut engendrer des obstacles aux apprentissages. Les systèmes numériques devenant de plus en plus puissants, les hommes ont cherché à utiliser de moins en moins de signes. Cette économie a une contre-partie, c'est la complexité pour comprendre la façon dont on combine ces signes, ces symboles, ce fameux système de numération.

3. Des obstacles et des stratégies adaptatives possibles :

- **La notation positionnelle :** la pluralité va être indiquée non pas par le nombre de chiffres, mais par la place des uns par rapport aux autres : 21 et 12 ; ce sont les mêmes chiffres mais pas les mêmes nombres.

- **Le rôle particulier du zéro :** le zéro n'a pas été crée par l'humanité pour représenter une quantité ; il a été là pour marquer une place vide, parce que justement si on ne la marque pas, cette place ne se voit pas : dans 105 et 15, comment évaluer la place libre entre le 1 et le 5 ?

- **Le double codage oral et écrit :** il va falloir que l'enfant apprenne deux systèmes de représentation, et en plus il doit savoir passer de l'un à l'autre.

Quatre-vingt-dix-sept → 97. Quand on dit « quatre-vingt-dix-sept » on utilise 4 mots, pour écrire, on utilise 2 chiffres, et ça n'indique rien sur la quantité perçue. Quand on dit « cent » on n'utilise qu'un seul mot et c'est une quantité plus importante que « quatre-vingt-dix-sept ».

Tout le monde connaît les erreurs de transcodage et je vais passer vite :

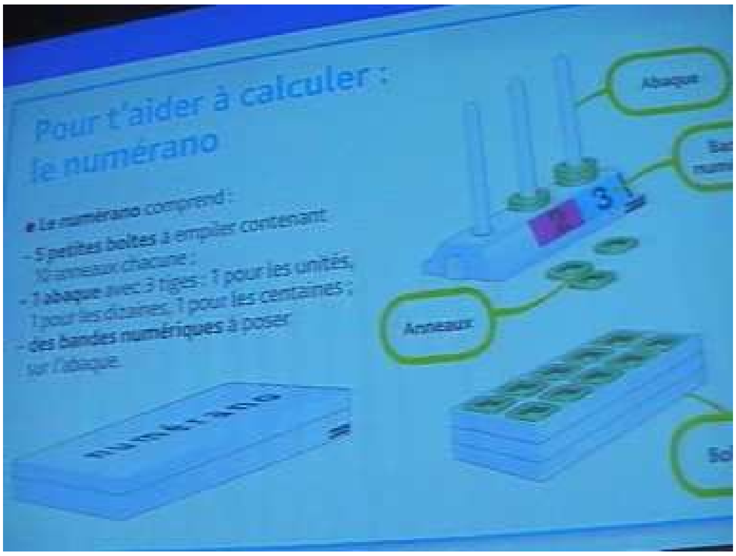
- Erreurs lexicales :
    - Opposition ordre d'énonciation et ordre de transcription : « quatorze » transcrit 40
    - Similitude entre les sons : « treize » transcrit 16

- Et surtout les erreurs syntaxiques : les syntaxes sont différentes à l'oral et à l'écrit. « soixante-dix-sept » transcrit 6017 ou 60107, qui montre une non-compréhension de la construction du système de combinaison des signes. Les enfants écrivent ce qu'ils entendent.

➔ Adapter ?

- Privilégier la compréhension du système de numération écrite :
    - Limiter le recours aux repères auditifs ou oraux : tr… dans treize, trois, trente
    - Favoriser les repères conceptuels : la compréhension de l'équivalence entre 10 unités discrètes et 1 nouvelle unité « l'entité dizaine ».
    - La numération (en chiffres arabes) est un système constitué de lois régulières qu'on peut donc retrouver à l'aide d'un raisonnement (la logique

de construction de ce système écrit) plutôt que de faire appel à la mémorisation directe mot-nombre/écriture chiffrée.

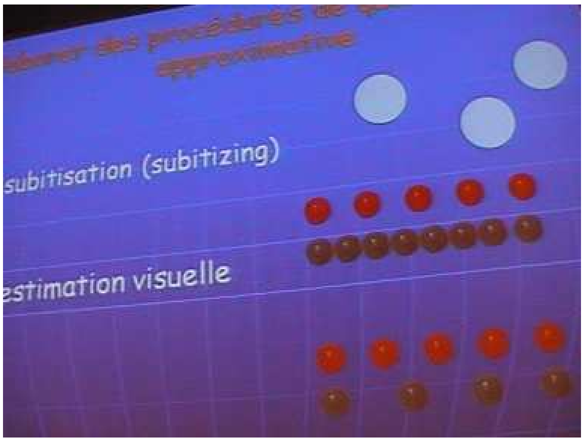


Là je vous ai mis un matériel qui a été conçu pour travailler ce transcodage, c'est-à-dire qu'on va avoir à la fois une représentation des quantités avec l'abaque et les anneaux, la place en notation positionnelle base 10, et sur les bandes numériques, on ne voit pas ici mais il y a écrit vingt sur la bande rose et on remet par-dessus la bande unité, la bande 3, ce qui fait « vingt dans la catégorie dizaine en rose + 3 unités en bleu », pour faire le lien entre les unité et les dizaines.

B- Les enjeux du concept de nombre :

Représenter une quantité d'objets absents :

- De façon approximative : estimer par la perception visuelle,



Le subtizing (estimation exacte) ne marche que pour des toutes petites quantités (un deux trois, +/4)

L'estimation visuelle est aussi source d'erreur : confusion entre la taille de la collection et la place qu'elle occupe dans l'espace

L'estimation est nécessaire mais non suffisante :

- De façon précise : le dénombrement qui passe par la correspondance terme à terme et la numération qui va nous obliger à faire une correspondance entre des collections et des signes-nombres ou mots-nombre

Les connaissances pour élaborer des procédures de quantification précise sont multiples :

- Connaître la chaine numérique

- o Effectuer une double correspondance : externe par pointage des objets un à un (oeil/main/objet), et interne pour synchroniser le rythme d'énonciation de la comptine et le geste

- o Savoir attribuer un cardinal à la collection : La quantité exacte (la réponse à la question combien ?) correspond au dernier nom de nombre énoncé. C'est lui qui représente l'ensemble de la collection et de tous les objets.

C'est essentiel pour comprendre les propriétés de la quantité exacte, du nombre, qui est une notion particulièrement abstraite :

- Le nombre ne dépend pas des propriétés des objets (couleur, forme, usage)

- Le nombre ne dépend pas de l'organisation spatiale des objets à compter

- Le nombre ne dépend pas de l'ordre dans lequel les objets sont comptés

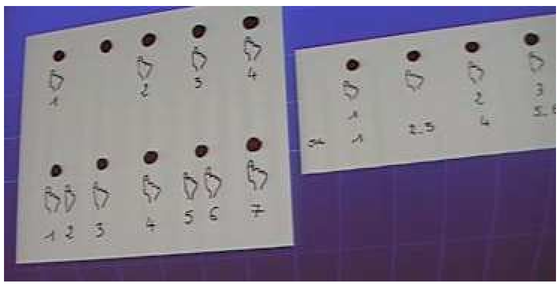
- Les nombres peuvent être identifiés de plusieurs façons, par des mots et par des signes

- Les nombres sont organisés entre eux à l'aide d'une relation d'ordre

<u>Les difficultés :</u>

- Au niveau de la comptine : des enfants qui sont toujours obligés de repartir de 1 si on les arrête dans leur dénombrement, des mots qu'ils n'arrivent pas à mémoriser du fait de troubles du langage

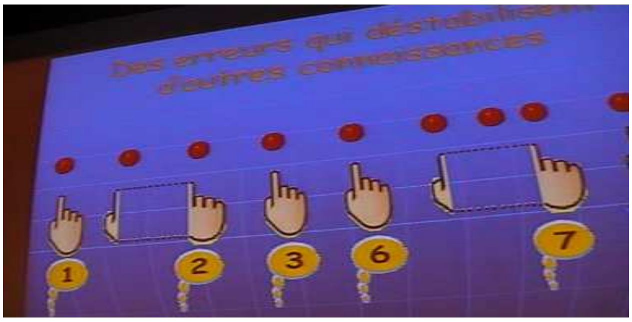
- Au niveau de la quantification approximative : problème de perception visuelle des collections, d'agencement dans l'espace



- Au niveau du dénombrement : avec les enfants dyspraxiques par exemple, on sait qu'ils ont beaucoup de difficultés à coordonner toutes les correspondances. Il y a 20 types d'erreurs possibles entre toutes ces correspondances, en voici quelques exemples: c'est la correspondance externe qui ne va pas à G, la correspondance interne à D : on pointe bien mais la comptine est trop lente ou trop rapide

- Au niveau de la concordance entre les deux procédures de quantification : difficulté à faire une congruence entre ce qu'ils ont estimé approximativement et le résultat de leur quantification en dénombrement, ce qui met en défaut la conception de la permanence du nombre.

Exemple d'une enfant dyspraxique, qui avait une bonne comptine numérique, mais l'enseignante la fait recommencer et recommencer et comme elle sait qu'il faut trouver 10, elle essaie de faire coller la comptine au pointage et se trompe sciemment, et ça donne un trouble de correspondance interne associé:



On voit bien que ce type de difficultés va nécessiter une pédagogie adaptée ; ces enfants-là, il faut arrêter de les faire dénombrer ;

<u>Des stratégies adaptatives pour le dénombrement ?</u>

1. Entrainer :

   a. Utiliser des collections d'objets déplaçables (pour que ce qui reste à compter soit bien différencier)

   b. Énoncer les mots de la comptine lorsque les objets sont posés (quand on entend le bruit de l'objet qui est posé)

2. Contourner et compenser :

   a. Utiliser des pairs pour effectuer le dénombrement

   b. Supprimer les activités de dénombrer et compenser pas la connaissance des propriétés numériques, pour pouvoir tout de même rentrer dans l'apprentissage du calcul

C- Les enjeux de l’apprentissage du calcul :

Les propriétés numériques sont l’enjeu de l’apprentissage du calcul +++

Le calcul permet de mettre en relation des quantités, en se passant de la présence physique des objets. Par exemple pour additionner, on passe progressivement de la réunion physique d’objets à la récupération directe du résultat en mémoire.

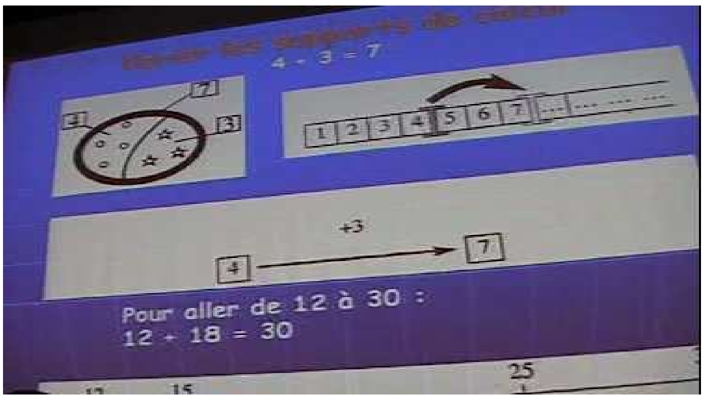
On utilise : - soit les objets ou des représentations de ces objets et on effectue du comptage

- soit les représentations numériques et on effectue du calcul.

Il faut donc vérifier la validité des propriétés numériques par des procédures de comptage :

- réunir effectivement les deux collections et compter le tout
- compter successivement les deux collections en commençant par la première
- compter successivement les deux collections en commençant par la plus grande
- égrener la comptine à partir du premier nombre en dénombrant la 2e collection
- égrener la comptine à partir du plus grand nombre en dénombrant la collection la plus petite…

et amener progressivement l’enfant à opter pour des supports visuels symboliques :



Pour arriver à la compréhension des règles de calcul élémentaires :

- un même nombre est représenté avec différentes écritures numériques :

6= 4+2= 5+1 ou 6= 3X2 = 6X1 ou 6= 12/2

- propriétés des opérations arithmétiques commutativité, associativité

Et la conceptualisation des procédures de calcul : exemple de l'addition, pour faciliter le calcul mental :

- utilisation des propriétés de la numération pour décomposer les nombres : 43+39 c'est 40+3 et 30+9
- remplacement d'une écriture additive par une autre sans changer le résultat : 40+3+30+9 c'est 40+30+3+9
- exécution d'un calcul de plusieurs façons : 40+30 (70) puis 3+9 (12)
- utilisation des propriétés de la numération pour recomposer les nombres

DES OBJECTIFS PEDAGOGIQUES ?

Donc on voit que l'enjeu est de privilégier tout ce qui concerne la conceptualisation, de s'appuyer sur le raisonnement en appliquant des règles logiques, pour permettre aux élèves de:

- contrôler leur calcul (autrement que par le comptage)
- anticiper un résultat en développant des stratégies de calculs approximatifs
- résoudre plus économiquement les problèmes en soulageant la charge de la mémoire de travail et en acquérant de la flexibilité mentale

Des principes généraux pour construire un cadre d'apprentissage adapté et efficace :

- évaluer ce qui dysfonctionne, mais aussi ce qui fonctionne +++
- *réinjecter le goût d'apprendre et le plaisir de faire des maths*, utiliser le jeu et les activités expérimentales « découvertes » ; donner du « sens » aux activités mathématiques ; en fait c'est l'élève qui peut donner du sens à ce qu'il fait ; on ne peut pas donner du sens à sa place. Ce qu'on peut faire, c'est lui proposer des apprentissages signifiants, c'est-à-dire qui vont répondre à des problèmes qu'il se pose. Pour que ça ait du sens, il va falloir qu'il intériorise cette signification, qu'il l'intègre à ses propres représentations, à sa propre construction. Et il faut prendre le temps nécessaire pour que ces apprentissages signifiants fassent sens pour lui. On lui donne le temps, les moyens et les outils pour que ça puisse faire sens pour lui.

- *Redonner toute sa place à la conceptualisation en ne réduisant pas les maths à du langage* ; c'est quelque chose qu'on retrouve maintenant à tous les niveaux, de la maternelle à l'université ; on dit : s'il a des problèmes en langage, c'est normal qu'il ait des problèmes en maths. Bien sûr qu'il y a une forte relation, il ne faut pas l'oublier. Comme on l'a vu avec l'intervention précédente, tout l'enjeu est de passer du percept au concept ; et ça, ça ne va pas se faire uniquement avec du langage. Un concept mathématique existe par toutes les situations dans lesquelles il est utilisé. Tout cet ensemble de situations va faire partie du concept, ainsi que toutes les façons dont on peut résoudre le problème, toutes les procédures utilisées. Et il n'y a pas un langage, il y a des langages en mathématique. Il y pleins de signifiants différents et forcément des mots mais aussi des symboles écrits et des règles de combinaison de ces symboles qui sont propres.

- *Faciliter le franchissement des paliers d'abstraction* : en se dotant d'outils pour aider à la représentation mentale, c'est-à-dire qu'il va falloir accompagner l'évocation mentale avec du matériel et des mises en situation.

- *Valoriser la vicariance* en multipliant les cheminements vers un résultat dans une même situation ; c'est attesté maintenant par un grand nombre de travaux scientifiques : il faut résoudre un même problème de différentes façons, l'approche multiple et diversifiée d'un concept permet de mieux le cerner.

- *Prendre en compte les besoins individuels tout en favorisant les interactions* : prendre en compte les besoins individuels d'un enfant ne signifie pas le traiter de manière individuelle ou encore, la pédagogie différenciée n'est pas la même chose que de la pédagogie individuelle. Il ne faut pas oublier tous les bénéfices des interactions entre les élèves, et l'adaptation pédagogique, c'est aussi se servir des interactions dans les processus d'apprentissage.

EN CONCLUSION :

- Des profils d'élèves variés

- Des causes et des conséquences diversifiées

- Des facteurs explicatifs multiples en interaction…

- D'où la nécessité d'un travail interdisciplinaire pour conduire l'action pédagogique.

Entre les enfants qui auraient « des troubles » et ceux qui seraient « en simple difficulté » quelle différence ? pour les enfants en simple difficulté on va aménager, faire des petites collines, des étapes, des petites marches pour grimper sur la montagne, éviter les grandes enjambées. Avec les enfants qui ont des troubles, on ne va pas chercher à grimper sur la colline, mais on va tourner autour, sans perdre de vue l'objectif qu'on avait. C'est arriver d'une autre façon au même objectif. Et là, en tant que pédagogue, on a besoin des autres disciplines, des neuropsychologues, des psychologues… pour savoir de quel type d'enfants il s'agit.